Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

73. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 12. APRIL 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

---

73. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Kellerer, H. G., Lageparameter n-dimensionaler Verteilungsfunktionen 197

Leeuw, K. de, On the Adjoint Semigroup and Some Problems in the Theory of Approximation 219

Leptin, H., Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen 235

MacRobert, T. M., Recurrence Formulae for the E-functions 254

Parameswaran, M. R., and C. T. Rajagopal, Tauberian theorems invariant for a product of two summability methods 256

Walter, W., Über die Differentialgleichung $u_{xy}=f(x, y, u, u_x, u_y)$. III. Die nichtcharakteristische Anfangswertaufgabe 268

Baker, I. N., The existence of fixpoints of entire functions 280

Groemer, H., Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich . . . 285

Unveränderter Nachdruck 1974

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

KELLERER, H. G.
Math. Zeitschr. 73, 197–218 (1960)

Lageparameter n-dimensionaler Verteilungsfunktionen

Von

HANS G. KELLERER

EINLEITUNG. In der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihren Anwendungsgebieten ergibt sich oft die Notwendigkeit, eine Verteilungsfunktion durch einige wenige Daten zu kennzeichnen. Die größte Bedeutung besitzt dabei eine Charakterisierung der „Lage": der Verteilung $F_{\mathfrak{a}}$ eines zufälligen Vektors $\mathfrak{a}$ mit n Komponenten wird zugeordnet ein Punkt $L(F_{\mathfrak{a}})$ des n-dimensionalen Raumes. Hier erhebt sich als erstes die Frage, welche Eigenschaften von derartigen Funktionalen L allgemein zu fordern sind. In § 1 werden daher zunächst die zu einer axiomatischen Einführung des Begriffes „Lageparameter" erforderlichen Hilfsmittel entwickelt. Nach einigen einfachen Folgerungen aus dem Axiomensystem wird dann untersucht, wie weit dieses zu verschärfen ist, um als einzige Lösung den Erwartungswert zu besitzen. In § 2 wird daran anschließend mit Hilfe eines einheitlichen Ansatzes eine stetige Schar von Lageparametern konstruiert. Dazu wird zunächst die Lösung einer Funktionalgleichung benötigt. In § 3 wird dann untersucht, wie sich aus diesen Lageparametern die meistgebrauchten Mittelwerte als Spezialfälle bzw. durch geeignete Grenzprozesse ableiten. Dabei ergibt sich unter anderem eine Möglichkeit, die Mehrdeutigkeit des Medians zufälliger Variablen zu beseitigen.

Bezeichnungen. Für Teilmengen $\mathfrak{M}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}_n$ ist:

$\mathfrak{M}^a$ die abgeschlossene Hülle, $\mathfrak{M}^i$ der offene Kern, $\mathfrak{M}^e$ der Rand,

$\mathfrak{M}^x$ die abgeschlossene konvexe Hülle und $\overline{\mathfrak{M}}$ das Komplement von $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{F}_n$ bezeichnet die Gesamtheit der n-dimensionalen Verteilungsfunktionen,

„$\rightsquigarrow$" die darin definierte Verteilungskonvergenz und

$$F_{\mathfrak{a}} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_k \\ p_1 \dots p_k \end{bmatrix} \text{ die Verteilung mit } p(\mathfrak{a} = \vec{\alpha}_\varkappa) = p_\varkappa,\ \sum_\varkappa p_\varkappa = 1.$$

„Verteilungsfunktion" wird mit Vf., „nach Wahrscheinlichkeit" mit n.W. abgekürzt; das Symbol $\square$ dient – an Stelle von Abkürzungen wie „q.e.d." – dazu, das Ende eines Beweises zu kennzeichnen.

§ 1. Allgemeine Lageparameter

Um von oben erwähnten Funktionalen L eine gewisse Stetigkeit fordern zu können, ist zunächst eine Topologie in ihrem Definitionsbereich $\mathfrak{F}_n$ notwendig. Die Verteilungskonvergenz ist dabei als Ausgangspunkt ungeeignet,

da für das klassische Beispiel eines Lageparameters, den Erwartungswert, z. B. gilt:

$$F_{a_l} = \begin{bmatrix} 0 & l \\ 1-\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \sim F_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E(a_l) = 1 \neq E(a) = 0.$$

Es ist zweckmäßig, sich zunächst auf den Fall $n = 1$ zu beschränken:

DEFINITION 1.1. *Vf. aus $\mathfrak{F}_1$ ist als Abstand zugeordnet*

$$|F_a, F_b| = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_a(y) - F_b(y)|\, dy \quad (\leqq \infty).$$

Durch diese Definition wird die Menge $\mathfrak{F}_1$ zu einem metrischen Raum, da insbesondere aus $|F_a, F_b| = 0$ folgt, daß F_a und F_b L-fast übereinstimmen, also wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Vf. identisch sind. Als einfache Eigenschaften des Abstandes seien angeführt

$$|F_a, F_{a+\gamma}| = |\gamma| \quad \text{und} \quad |F_{\gamma a}, F_{\gamma b}| = |\gamma| \cdot |F_a, F_b|.$$

Der Erwartungswert ist im metrischen Raum $\mathfrak{F}_1$ gleichmäßig stetig:

HILFSSATZ 1.1. *Für integrierbare zufällige Variablen gilt*

$$|E(a) - E(b)| \leqq |F_a, F_b|.$$

BEWEIS. Ist a integrierbar, so gilt

$$\lim_{\gamma \to \infty} \gamma \cdot F_a(-\gamma - 0) = 0 = \lim_{\gamma \to \infty} \gamma \left(1 - F_a(\gamma)\right), \tag{1}$$

da

$$\gamma \cdot F_a(-\gamma - 0) + \gamma \left(1 - F_a(\gamma)\right) = \gamma \cdot p(|a| > \gamma) \leqq \int_{(\gamma, \infty)} y\, dF_{|a|}(y) \to 0 \text{ für } \gamma \to \infty.$$

Partielle Integration ergibt unter Beachtung von (1)

$$E(a) = -\int_{-\infty}^{0} F_a(y)\, dy + \int_{0}^{+\infty} \left(1 - F_a(y)\right) dy. \tag{2}$$

Die Behauptung folgt nun ohne weiteres aus

$$E(a) - E(b) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_a(y) - F_b(y)\right) dy. \qquad \square$$

Es ist leicht einzusehen, daß sich jede Vf. $F_a \in \mathfrak{F}_1$ beliebig genau durch diskrete Vf. mit äquidistanten Sprungstellen approximieren läßt; ist a integrierbar, so ist folgende Verschärfung möglich:

HILFSSATZ 1.2.

$$\mathfrak{E} = \left\{ F_a \in \mathfrak{F}_1 : F_a = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha+\beta & \dots & \alpha+k\beta \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k \end{bmatrix} \textit{ mit } \alpha, \beta \textit{ reell} \right\}$$

ist dicht in der Menge aller Vf. zu integrierbaren zufälligen Variablen.

BEWEIS. Ist $F_{a_l} \in \mathfrak{E}$ definiert durch

$$F_{a_l}(y) = \begin{cases} 0 \text{ für } y < -l \\ F_a\left(\frac{k}{l}\right) \text{ für } \frac{k}{l} \leqq y < \frac{k+1}{l}, \; -l^2 \leqq k < +l^2, \\ 1 \text{ für } y > +l \end{cases} \text{ so gilt}$$

$$|F_{a_l}, F_a| = \int_{-\infty}^{-l} F_a(y)\, dy + \sum_{k=-l^2}^{l^2-1} \int_{\frac{k}{l}}^{\frac{k+1}{l}} \left(F_a(y) - F_a\left(\frac{k}{l}\right)\right) dy + \int_{+l}^{+\infty} \left(1 - F_a(y)\right) dy$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{-l} F_a(y)\, dy + \sum_{k=-l^2}^{l^2-1} \frac{1}{l}\left(F_a\left(\frac{k+1}{l}\right) - F_a\left(\frac{k}{l}\right)\right) + \int_{+l}^{+\infty} \left(1 - F_a(y)\right) dy$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{-l} F_a(y)\, dy + \frac{1}{l} + \int_{+l}^{+\infty} \left(1 - F_a(y)\right) dy \to 0 \text{ für } l \to \infty \text{ (vgl. (2))}. \; \square$$

Zwischen der Konvergenz im Raum $\mathfrak{F}_1$ und der Verteilungskonvergenz besteht folgender Zusammenhang:

HILFSSATZ 1.3. a) $|F_{a_l}, F_a| \to 0$ *hat stets* $F_{a_l} \rightsquigarrow F_a$ *zur Folge,*

b) $F_{a_l} \rightsquigarrow F_a$ *hat* $|F_{a_l}, F_a| \to 0$ *zur Folge, falls die zufälligen Variablen* a_l *gleichmäßig n.W. beschränkt sind.*

BEWEIS. a) Ist y_0 eine Stetigkeitsstelle von F_a und $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert $\delta > 0$ und dazu nach Voraussetzung l_0 mit

$$|F_a(y) - F_a(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad |y - y_0| \leqq \delta$$

und

$$|F_{a_l}, F_a| < \frac{\delta\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad l \geqq l_0.$$

Das ergibt wegen der Monotonie der Vf.

$$\frac{\delta\varepsilon}{2} > \begin{cases} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(F_a(y) - F_{a_l}(y)\right) dy > \delta\left(F_a(y_0) - \frac{\varepsilon}{2} - F_{a_l}(y_0)\right) \\ \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(F_{a_l}(y) - F_a(y)\right) dy > \delta\left(F_{a_l}(y_0) - F_a(y_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{cases}$$

d.h.

$$|F_{a_l}(y_0) - F_a(y_0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad l \geqq l_0.$$

b) Zu $\varepsilon > 0$ existieren Stetigkeitsstellen $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ von F_a mit

$$0 < \alpha_\mu - \alpha_{\mu-1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1 \quad \text{und} \quad \alpha_0 \overset{\text{n.W.}}{\leqq} a_l \overset{\text{n.W.}}{\leqq} \alpha_m \quad \text{für} \quad l \geqq 1,$$

d.h.

$$|F_{a_l}(\alpha_\mu) - F_a(\alpha_\mu)| < \frac{1}{m} \quad \text{für alle } \mu \text{ und hinreichend großes } l.$$

Für diese l gilt daher im Intervall $[\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu]$

$$F_a(\alpha_{\mu-1}) - \frac{1}{m} - F_a(\alpha_\mu) < F_{a_l}(y) - F_a(y) < F_a(\alpha_\mu) + \frac{1}{m} - F_a(\alpha_{\mu-1}),$$

also wegen $F_{a_l}(y)=0=F_a(y)$ für $y<\alpha_0$ und $F_{a_l}(y)=1=F_a(y)$ für $y>\alpha_m$

$$|F_{a_l}, F_a| = \sum_{\mu=1}^{m} \int_{\alpha_{\mu-1}}^{\alpha_\mu} |F_{a_l}(y) - F_a(y)|\, dy < \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{m} + F_a(\alpha_\mu) - F_a(\alpha_{\mu-1})\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(m \cdot \frac{1}{m} + F_a(\alpha_m) - F_a(\alpha_0)\right) \leqq \varepsilon. \qquad \text{⌟}$$

Der allgemeine Fall läßt sich nun – mit einer im weiteren vorteilhaften Verallgemeinerung – mittels der Metrik des $\mathfrak{R}_n$ folgendermaßen auf den Fall $n=1$ zurückführen:

DEFINITION 1.2. *$F_{a_l}\in\mathfrak{F}_n$ konvergiert vom Grad $r>0$ gegen F_a ($F_{a_l}\xrightarrow{r}F_a$), falls*

$$|F_{|a_l-t|^r}, F_{|a-t|^r}| \to 0 \quad \textit{für alle } t\in\mathfrak{R}_n.$$

Insbesondere für eindimensionale Vf. gilt dabei:

HILFSSATZ 1.4. *Die Konvergenz im metrischen Raum $\mathfrak{F}_1$ hat die Konvergenz vom Grad 1 zur Folge.*

BEWEIS. Eine Abänderung des Integranden in abzählbar vielen Stellen, also auf einer Lebesgueschen Nullmenge, liefert

$$|F_{|a-t|}, F_{|b-t|}| = \int_0^\infty \left|\left(F_a(t+y) - F_a(t-y-0)\right) - \left(F_b(t+y) - F_b(t-y-0)\right)\right| dy$$

$$= \int_0^\infty \left|\left(F_a(t+y) - F_b(t+y)\right) - \left(F_a(t-y) - F_b(t-y)\right)\right| dy$$

$$\leqq \int_0^\infty |F_a(t+y) - F_b(t+y)|\, dy + \int_0^\infty |F_a(t-y) - F_b(t-y)|\, dy$$

$$= |F_a, F_b|. \qquad \text{⌟}$$

Die oben definierte Konvergenz ist um so schwächer, je niedriger ihr Grad ist:

SATZ 1.1. *Gilt $F_{a_l}\xrightarrow{s}F_a$, so auch $F_{a_l}\xrightarrow{r}F_a$ für $0<r<s$.*

BEWEIS. Die Substitution $z=y^{\frac{s}{r}}$ ergibt wegen $-1<\frac{r}{s}-1<0$

$$|F_{|a_l-t|^r}, F_{|a-t|^r}| = \int_0^\infty \left|p\left(|a_l-t|^s \leqq y^{\frac{s}{r}}\right) - p\left(|a-t|^s \leqq y^{\frac{s}{r}}\right)\right| dy$$

$$= \frac{r}{s}\int_0^\infty z^{\frac{r}{s}-1}\left|p(|a_l-t|^s \leqq z) - p(|a-t|^s \leqq z)\right| dz$$

$$\leqq \frac{r}{s}\left(\int_0^\alpha z^{\frac{r}{s}-1}\cdot 1 \cdot dz + \int_\alpha^\infty \alpha^{\frac{r}{s}-1}\cdot |\ldots|\, dz\right)$$

$$\leqq \frac{r}{s}\left(\frac{s}{r}\cdot\alpha^{\frac{r}{s}} + \alpha^{\frac{r}{s}-1}\,|F_{|a_l-t|^s}, F_{|a-t|^s}|\right),$$

d. h.

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} |F_{|a_l-t|^r}, F_{|a-t|^r}| \leqq \alpha^{\frac{r}{s}} \quad \text{für alle } \alpha>0;$$

daraus folgt für $\alpha\to 0$ die Behauptung (da t beliebig). ⌟

Der Grad der Konvergenz ist dabei tatsächlich wesentlich, wie sich aus folgendem einfachen Beispiel ergibt ($\alpha>0$):

$$\begin{bmatrix} 0 & l^{\alpha} \\ 1-\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{genau für } r<\frac{1}{\alpha}.$$

Um die Konvergenz vom Grad r mit der Verteilungskonvergenz vergleichen zu können, sind zwei maßtheoretische Hilfssätze erforderlich:

Hilfssatz 1.5. *Notwendig für $F_{a_l}\rightsquigarrow F_{a_0}$ ist mit $p_l(\mathfrak{M})=p\,(a_l\in\mathfrak{M})$:*

$$p_l(\mathfrak{B})\to p_0(\mathfrak{B}) \quad \textit{für alle Borelschen Mengen } \mathfrak{B} \textit{ mit } p_0(\mathfrak{B}^e)=0.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{J}$ die Gesamtheit der Intervalle $\left\{\underset{\sim}{x}\colon \vec{\alpha}<\underset{\sim}{x}\leqq\vec{\beta}\right\}$ mit $\alpha_\nu, \beta_\nu\in\mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge des $\mathfrak{R}_n$ ist, die keine Unstetigkeitskoordinaten von F_{a_0} enthält. Dann ist $\mathfrak{J}$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen des $\mathfrak{R}_n$, die eine Darstellung durch disjunkte Basiselemente $\mathfrak{I}\in\mathfrak{J}$ gestattet, wobei

$$p_0(\mathfrak{I})=\lim_{l\to\infty} p_l(\mathfrak{I}) \qquad \left(\text{da } F_{a_0}(\mathfrak{y})=\lim_{l\to\infty} F_{a_l}(\mathfrak{y}) \text{ für } y_\nu\in\mathfrak{A}\right).$$

Ist nun $\mathfrak{B}$ eine Borelsche Menge des $\mathfrak{R}_n$ mit $p_0(\mathfrak{B}^e)=0$ und $\mathfrak{B}^i=\sum_{\mu=1}^{\infty}\mathfrak{I}_\mu$ mit disjunkten $\mathfrak{I}_\mu\in\mathfrak{J}$, so gilt

$$\begin{aligned} p_0(\mathfrak{B}) &\leqq p_0(\mathfrak{B}^a)=p_0(\mathfrak{B}^i)=\sum_{\mu=1}^{\infty} p_0(\mathfrak{I}_\mu) \\ &\leqq \lim_{l\to\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} p_l(\mathfrak{I}_\mu)=\lim_{l\to\infty} p_l(\mathfrak{B}^i)\leqq \lim_{l\to\infty} p_l(\mathfrak{B}), \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} p_0(\mathfrak{B}) &\leqq \lim_{l\to\infty} p_l(\mathfrak{B}) \leqq \overline{\lim_{l\to\infty}}\, p_l(\mathfrak{B}) = 1-\lim_{l\to\infty} p(\overline{\mathfrak{B}}) \\ &\leqq 1-p_0(\overline{\mathfrak{B}})=p_0(\mathfrak{B}) \qquad (\text{da auch } p_0(\overline{\mathfrak{B}}^e)=0). \end{aligned}$$

Dieser Satz führt unmittelbar zu folgendem Nebenergebnis:

Ist A eine stetige Abbildung des $\mathfrak{R}_n$ in den $\mathfrak{R}_m$, so folgt aus $F_{a_l}\rightsquigarrow F_a$ auch $F_{A\,a_l}\rightsquigarrow F_{A\,a}$.

Eine Umkehrung von Hilfssatz 1.5 ist:

Hilfssatz 1.6. *Hinreichend für $F_{a_l}\rightsquigarrow F_{a_0}$ ist mit $p_l(\mathfrak{M})=p\,(a_l\in\mathfrak{M})$:*

$$p_l(\mathfrak{K})\to p_0(\mathfrak{K}) \quad \textit{für alle abgeschlossenen Kugeln } \mathfrak{K} \textit{ mit } p_0(\mathfrak{K}^e)=0.$$

Beweis. Ein Überdeckungssatz von Saks[1]) erlaubt folgende leichte Verallgemeinerung:

[1]) Saks, S.: Theory of the Integral, S. 149.

Ist p ein Intervallmaß im $\mathfrak{R}_n$, so existieren zu jeder offenen Menge $\mathfrak{G}$ disjunkte abgeschlossene Kugeln $\mathfrak{K}_\mu \subset \mathfrak{G}$ mit $p(\mathfrak{G}) = \sum_{\mu=1}^{\infty} p(\mathfrak{K}_\mu)$.

Daher existieren zu $\varepsilon > 0$ disjunkte abgeschlossene Kugeln $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m \subset \mathfrak{G}$ mit

$$p_0(\mathfrak{G}) - \sum_{\mu=1}^{m} p_0(\mathfrak{K}_\mu) < \varepsilon \quad \text{und} \quad p_0(\mathfrak{K}_\mu^e) = 0; \tag{3}$$

denn da $\mathfrak{G}$ offen ist, und $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ abgeschlossen sind, läßt sich die zweite Bedingung erfüllen durch eine hinreichend kleine Vergrößerung des Radius von $\mathfrak{K}_\mu$ (bei festem Kugelmittelpunkt gilt $p_0(\mathfrak{K}^e) > 0$ nur für abzählbar viele Werte des Radius). Verwendung der Voraussetzung führt daraus zu

$$p_0(\mathfrak{G}) - \varepsilon < \sum_{\mu=1}^{m} p_0(\mathfrak{K}_\mu) = \lim_{l\to\infty} \sum_{\mu=1}^{m} p_l(\mathfrak{K}_\mu) \leqq \varliminf_{l\to\infty} p_l(\mathfrak{G}).$$

Da in (3) $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt also für Stetigkeitsstellen $\mathfrak{y}$ von $F_{\mathfrak{a}_0}$

$$F_{\mathfrak{a}_0}(\mathfrak{y}) = p(\mathfrak{a}_0 < \mathfrak{y}) \leqq \varliminf_{l\to\infty} p(\mathfrak{a}_l < \mathfrak{y}) \leqq \varliminf_{l\to\infty} F_{\mathfrak{a}_l}(\mathfrak{y})$$
$$\leqq \overline{\lim_{l\to\infty}} F_{\mathfrak{a}_l}(\mathfrak{y}) = 1 - \varliminf_{l\to\infty} p(\mathfrak{a}_l \nleqq \mathfrak{y}) \leqq 1 - p(\mathfrak{a}_0 \nleqq \mathfrak{y}) = F_{\mathfrak{a}_0}(\mathfrak{y}). \quad \square$$

Nun läßt sich Hilfssatz 1.3 auf die Konvergenz vom Grad r übertragen:

SATZ 1.2. a) $F_{\mathfrak{a}_l} \xrightarrow{r} F_{\mathfrak{a}_0}$ *hat stets* $F_{\mathfrak{a}_l} \rightsquigarrow F_{\mathfrak{a}_0}$ *zur Folge,*

b) $F_{\mathfrak{a}_l} \rightsquigarrow F_{\mathfrak{a}_0}$ *hat* $F_{\mathfrak{a}_l} \xrightarrow{r} F_{\mathfrak{a}_0}$ *zur Folge, falls die zufälligen Vektoren* $\mathfrak{a}_l$ *gleichmäßig n.W. beschränkt sind.*

BEWEIS. a) $F_{\mathfrak{a}_l} \xrightarrow{r} F_{\mathfrak{a}_0}$ liefert nach Hilfssatz 1.3 a) $F_{|\mathfrak{a}_l - \mathfrak{t}|^r} \rightsquigarrow F_{|\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{t}|^r}$, d.h.

$$p(|\mathfrak{a}_l - \mathfrak{t}| \leqq y) \to p(|\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{t}| \leqq y) \quad \text{für} \quad p(|\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{t}| = y) = 0;$$

daher ist Hilfssatz 1.6 anwendbar.

b) $F_{\mathfrak{a}_l} \rightsquigarrow F_{\mathfrak{a}_0}$ liefert nach Hilfssatz 1.5 $F_{|\mathfrak{a}_l - \mathfrak{t}|^r} \rightsquigarrow F_{|\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{t}|^r}$ für $\mathfrak{t} \in \mathfrak{R}_n$, da

$$p(|\mathfrak{a}_l - \mathfrak{t}|^r \leqq y) \to p(|\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{t}|^r \leqq y) \quad \text{für} \quad p(|\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{t}|^r = y) = 0;$$

da auch die zufälligen Variablen $|\mathfrak{a}_l - \mathfrak{t}|^r$ gleichmäßig n.W. beschränkt sind, ist also Hilfssatz 1.3 b) anwendbar. $\square$

Das Beispiel im Anschluß an Satz 1.1 zeigt, daß der zweite Teil des Satzes ohne die einschränkende Bedingung nicht gilt. Dagegen sind die beiden Konvergenzarten äquivalent für gleichmäßig n.W. beschränkte zufällige Vektoren; in diesem Fall ist der Grad der Konvergenz unwesentlich. Satz 1.2a) ermöglicht es nun auch, den Konvergenzbegriff aus Definition 1.2 tatsächlich als solchen zu rechtfertigen:

$$F_{\mathfrak{a}_l} \xrightarrow{r} F_{\mathfrak{a}'}, \; F_{\mathfrak{a}_l} \xrightarrow{r} F_{\mathfrak{a}''} \quad \text{ergibt} \quad F_{\mathfrak{a}_l} \rightsquigarrow F_{\mathfrak{a}'}, \; F_{\mathfrak{a}_l} \rightsquigarrow F_{\mathfrak{a}''},$$

so daß $F_{\mathfrak{a}'}$ und $F_{\mathfrak{a}''}$ übereinstimmen.

Um bei den Funktionalen L die Wahl des Punktes $L(F_{\mathfrak{a}})$ in gewisser Weise einschränken zu können, empfiehlt es sich, folgende Menge einzuführen:

DEFINITION 1.3. *Der „Variationsbereich" des zufälligen Vektors* $\mathfrak{a}$ *ist*

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{a}) = \{\underset{\sim}{x} \in \mathfrak{R}_n\colon\ p\left(\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}(\underset{\sim}{x})\right) > 0 \quad \textit{für} \quad \mathfrak{G}(\underset{\sim}{x}) \ni \underset{\sim}{x},\ \mathfrak{G}(\underset{\sim}{x})\ \textit{offen}\}.$$

Zur Erläuterung dieses Begriffes können folgende Beispiele dienen:

1. Für $F_{\mathfrak{a}} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_k \\ p_1 \cdots p_k \end{bmatrix}$ mit $p_k > 0$ ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{a}) = \{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k\}$.

2. Besitzt $\mathfrak{a}$ die stetige Dichte $f_{\mathfrak{a}}$, so ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{y}\colon\ f_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y}) > 0\}^{12}$.

Allgemein läßt sich vom Variationsbereich zeigen:

SATZ 1.3. $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$ *ist abgeschlossen und* $p\left(\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}(\mathfrak{a})\right) = 1$.

BEWEIS. 1. Zu $\underset{\sim}{x} \in \overline{\mathfrak{V}(\mathfrak{a})}$ existiert eine offene Menge $\mathfrak{G}_0(\underset{\sim}{x}) \ni \underset{\sim}{x}$ mit

$$p\left(\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_0(\underset{\sim}{x})\right) = 0, \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{G}_0(\underset{\sim}{x}) < \overline{\mathfrak{V}(\mathfrak{a})};$$

daher ist $\overline{\mathfrak{V}(\mathfrak{a})}$ offen.

2. Aus $\overline{\mathfrak{V}(\mathfrak{a})} < \sum\limits_{\underset{\sim}{x} \in \overline{\mathfrak{V}(\mathfrak{a})}}{}' \mathfrak{G}_0(\underset{\sim}{x})$ folgt wegen der Rationalität des $\mathfrak{R}_n$

$$\overline{\mathfrak{V}(\mathfrak{a})} < \sum_{\lambda=1}^{\infty}{}' \mathfrak{G}_0(\underset{\sim}{x}_\lambda) \text{ mit geeigneten } \underset{\sim}{x}_\lambda \in \overline{\mathfrak{V}(\mathfrak{a})};$$

daher ist $p\left(\mathfrak{a} \in \overline{\mathfrak{V}(\mathfrak{a})}\right) = 0$.

$\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$ ist im übrigen in dieser Hinsicht minimal, d.h.

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{a}) = \prod{}' \{\mathfrak{M}\colon\ \mathfrak{M} \text{ abgeschlossen},\ p(\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}) = 1\}.$$

Die vorbereitenden Überlegungen lassen sich nun abschließen mit der Festlegung der im weiteren zugrunde gelegten Transformationsgruppe:

DEFINITION 1.4. *Die Gruppe* $\mathfrak{T}_n$ *der Ähnlichkeitstransformationen des* $\mathfrak{R}_n$ *ist die Gesamtheit der folgenden Abbildungen:*

$$T\underset{\sim}{x} = \sigma \mathsf{P}\underset{\sim}{x} + \vec{\tau} \quad \textit{mit } \sigma > 0,\ \mathsf{P} \textit{ orthogonal},\ \vec{\tau} \in \mathfrak{R}_n.$$

Nun läßt sich der Begriff „Lageparameter" axiomatisch einführen:

DEFINITION 1.5. $L \mid \mathfrak{F}$ *heißt Lageparameter, wenn folgendes erfüllt ist:*

(L_0) $F_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{F} < \mathfrak{F}_n$ *ist zugeordnet* $L(\mathfrak{a}) = L(F_{\mathfrak{a}}) \in \mathfrak{R}_n$ *mit*

(L_1) $\mathfrak{F}$ *geschlossen bezüglich* $\mathfrak{T}_n$,

(L_2) $L(T\mathfrak{a}) = TL(\mathfrak{a})$ *für* $F_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{F}$, $T \in \mathfrak{T}_n$,

(L_3) $L(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{V}(\mathfrak{a})^*$ *für* $F_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{F}$,

(L_4) L r*-stetig auf* $\mathfrak{F}$ *für ein* $r > 0$.

Dazu ist im einzelnen folgendes zu bemerken:

(L_1) läßt sich durch eine Einschränkung (oder Erweiterung) des Definitionsbereiches erfüllen.

(L_2) ist die Forderung, daß sich $L(\mathfrak{a})$ bei Änderungen des Koordinatensystems ebenso transformiert wie $\mathfrak{a}$.

(L_3) läßt sich nicht zur Forderung $L(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ verschärfen (vgl. hierzu das erste Beispiel nach Definition 1.3).

(L_4) bedeutet, daß L für hinreichend großes r stetig ist im Sinne der Topologie, die durch die Konvergenz vom Grad r in $\mathfrak{F}_n$ definiert wird; r-Stetigkeit hat dabei nach Satz 1.1 s-Stetigkeit für $s > r$ zur Folge. Die Stetigkeitsforderung ist wesentlich, um auszuschließen, daß L auf jeder der durch $\mathfrak{F}_n$ erzeugten Klassen von $\mathfrak{F}$ gesondert erklärt werden kann — etwa durch eine mit (L_3) verträgliche Festlegung von $L(\mathfrak{a})$ für je einen Repräsentanten $F_\mathfrak{a}$.

Aus zwei Lageparametern lassen sich sehr einfach weitere ableiten:

SATZ 1.4. *Sind $L'|\mathfrak{F}'$ und $L''|\mathfrak{F}''$ Lageparameter mit $\mathfrak{F}^{(1)} \subset \mathfrak{F}_n$, so ist $L = \vartheta L' + (1-\vartheta) L''$ für $0 < \vartheta < 1$ ein Lageparameter auf $\mathfrak{F}' \mathfrak{F}''$.*

BEWEIS. (L_1) gilt für $\mathfrak{F}^{(1)}$, also für $\mathfrak{F}' \mathfrak{F}''$.

(L_2) ergibt sich aus $T(\vartheta \xi' + (1-\vartheta)\xi'') = \vartheta T\xi' + (1-\vartheta) T\xi''$.

(L_3) folgt aus der Konvexität von $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})^\times$.

(L_4) L ist r-stetig mit $r = \max_i r_i$, falls $L^{(1)}$ r_i-stetig ist. ⌟

Für gewisse Vf. ermöglicht das Axiomensystem bereits Aussagen über $L(\mathfrak{a})$:

SATZ 1.5. *Ist $F_{T\mathfrak{a}} = F_\mathfrak{a}$ mit $T \in \mathfrak{T}_n$ und $L|\mathfrak{F}$ ein Lageparameter mit $\mathfrak{F} \ni F_\mathfrak{a}$, so ist $L(\mathfrak{a})$ ein Fixpunkt der Transformation T.*

BEWEIS. Es ist $TL(\mathfrak{a}) = L(T\mathfrak{a}) = L(F_{T\mathfrak{a}}) = L(F_\mathfrak{a}) = L(\mathfrak{a})$. ⌟

Ist also der zufällige Vektor $\mathfrak{a}$ beispielsweise symmetrisch zum Punkt $\vec{\alpha}$ verteilt, so gilt nach diesem Satz $L(\mathfrak{a}) = \vec{\alpha}$.

Das wichtigste Beispiel eines Lageparameters ist der Erwartungswert, der sich zu Beginn als bezüglich der Verteilungskonvergenz unstetig erwiesen hat:

SATZ 1.6. *E ist ein 1-stetiger Lageparameter auf $\mathfrak{F} = \{F_\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}_1$: $\mathfrak{a}$ integrierbar$\}$.*

BEWEIS. (L_1), (L_2) trivial.

(L_3) Nach Satz 1.3 genügt zur Bestimmung von $E(a)$ Integration über das Intervall $\mathfrak{B}(a)^\times$.

(L_4) Aus $\mathfrak{F} \ni F_{\mathfrak{a}_l} \xrightarrow{1} F_\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ folgt nach Hilfssatz 1.1 und Satz 1.2a)

$$E(|a_l|) \to E(|a|) \quad \text{und} \quad F_{\mathfrak{a}_l} \rightsquigarrow F_\mathfrak{a}.$$

Die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\big(E(a_l) - E(a)\big) - \Big(\int_{[-\gamma,+\gamma]} y\, dF_{\mathfrak{a}_l}(y) - \int_{[-\gamma,+\gamma]} y\, dF_\mathfrak{a}(y)\Big) \\
&\leqq \int_{\{|y|>\gamma\}} |y|\, dF_{\mathfrak{a}_l}(y) + \int_{\{|y|>\gamma\}} |y|\, dF_\mathfrak{a}(y) \\
&= \big(E(|a_l|) - E(|a|)\big) - \Big(\int_{[-\gamma,+\gamma]} |y|\, dF_{\mathfrak{a}_l}(y) - \int_{[-\gamma,+\gamma]} |y|\, dF_\mathfrak{a}(y)\Big) + 2 \int_{\{|y|>\gamma\}} |y|\, dF_\mathfrak{a}(y)
\end{aligned}$$

ergibt daher, falls $\pm\gamma$ Stetigkeitsstellen von $F_\mathfrak{a}$ sind:

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \, |E(a_l) - E(a)| \leqq 2 \int_{\{|y|>\gamma\}} |y|\, dF_\mathfrak{a}(y).$$

$\gamma \to \infty$ ergibt die Behauptung (da $E(|a|)$ vorhanden). ⌟

Von Interesse ist nun, wie weit das Axiomensystem zu verschärfen ist, um den Erwartungswert eindeutig zu charakterisieren; hier gilt:

SATZ 1.7. *L sei ein 1-stetiger Lageparameter auf $\mathfrak{F}=\{F_a\in\mathfrak{F}_1: a \text{ integrierbar}\}$; ist L außerdem additiv, so gilt $L|\mathfrak{F}=E|\mathfrak{F}$.*

BEWEIS. 1. Sei $g(p)=L(a)$ für $F_a=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{bmatrix}$, $0\leqq p\leqq 1$.

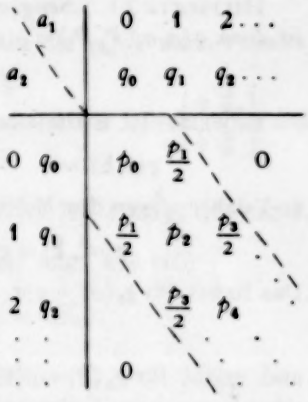
Dann folgt durch vollständige Induktion

$$L(a)=2^k\cdot g\left(2^{-k}E(a)\right) \quad \text{für} \quad F_a=\begin{bmatrix}0\dots 2^k\\ p_0\dots p_{2^k}\end{bmatrix}\in\mathfrak{F}; \tag{4}$$

denn für $k=0$ ist die Behauptung trivial, und für $k>0$ ergibt sie sich folgendermaßen: zu $F_a=\begin{bmatrix}0\dots 2^k\\ p_0\dots p_{2^k}\end{bmatrix}$ existieren (abhängige) zufällige Variable a_1, a_2 mit $F_{a_1+a_2}=F_a$ und

$$F_{a_i}=\begin{bmatrix}0\dots 2^{k-1}\\ q_0\dots q_{2^{k-1}}\end{bmatrix}, \qquad q_\varkappa=\frac{p_{2\varkappa-1}}{2}+p_{2\varkappa}+\frac{p_{2\varkappa+1}}{2}$$

(vgl. nebenstehende Skizze für F_{a_1,a_2}), so daß wegen der Additivität von L und E



$$\begin{aligned}L(a)&=L(a_1)+L(a_2)\\ &=2^{k-1}g\left(2^{-(k-1)}E(a_1)\right)+2^{k-1}g\left(2^{-(k-1)}E(a_2)\right)\\ &=2\cdot 2^{k-1}g\left(2^{-k+1}\frac{E(a)}{2}\right)\\ &=2^k\cdot g\left(2^{-k}E(a)\right).\end{aligned}$$

Anwendung von (4) auf $F_a=\begin{bmatrix}0\dots m\dots 2^k\\ 0\dots 1\dots 0\end{bmatrix}$ ergibt wegen (L_3)

$$\frac{m}{2^k}=\frac{L(a)}{2^k}=g\left(\frac{E(a)}{2^k}\right)=g\left(\frac{m}{2^k}\right) \quad \text{für } 0\leqq m\leqq 2^k,$$

d.h.

$$g(p)=p \quad \text{(da } g \text{ stetig nach Satz 1.2b)}). \tag{5}$$

2. Anwendung von (4) und (5) auf $F_a=\begin{bmatrix}0\dots k & k+1\dots 2^k\\ p_0\dots p_k & 0\quad\dots 0\end{bmatrix}$ ergibt

$$L(a)=2^k\cdot 2^{-k}E(a)=E(a) \quad \text{für} \quad F_a=\begin{bmatrix}0\dots k\\ p_0\dots p_k\end{bmatrix};$$

L und E stimmen also wegen (L_2) auf $\mathfrak{E}$ überein. Dabei ist $\mathfrak{E}$ nach Hilfssatz 1.2 und Hilfssatz 1.4 in $\mathfrak{F}$ dicht bezüglich Konvergenz vom Grad 1, so daß wegen der 1-Stetigkeit von L und E $L|\mathfrak{F}=E|\mathfrak{F}$. ⌟

§ 2. Mittlere Lagen r-ter Ordnung

Bekanntlich läßt sich der Erwartungswert einer quadratintegrierbaren zufälligen Variablen a auch definieren als Minimalstelle von

$$\psi_a(t)=E\left(\varphi(a;t)\right) \quad \text{mit} \quad \varphi(y,t)=(y-t)^2.$$

Davon ausgehend liegt es nahe, allgemein nach reellen Funktionen $\varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{t})$ von $\mathfrak{y}, \mathfrak{t} \in \mathfrak{R}_n$ mit folgender Eigenschaft zu fragen:

$\psi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{t}) = E\big(\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{t})\big)$ besitzt für $F_{\mathfrak{a}} \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_n$ eine eindeutige Minimalstelle $L(\mathfrak{a})$ derart, daß $L|\mathscr{F}$ einen Lageparameter definiert.

Um dabei die Wahl der Funktion φ etwas einzuschränken und zugleich das Axiom (L_2) zu befriedigen, ist es zweckmäßig, zu fordern

$$(*) \qquad \psi_{T\mathfrak{a}}(\mathfrak{t}) = \gamma(T; F_{\mathfrak{a}}) \cdot \psi_{\mathfrak{a}}(T^{-1}\mathfrak{t})$$

mit einer von $T \in \mathscr{T}_n$ und $F_{\mathfrak{a}} \in \mathscr{F}_n$ abhängigen Konstanten $\gamma(T; F_{\mathfrak{a}}) > 0$.

Zur übersichtlichen Lösung dieser Funktionalgleichung wird zunächst bewiesen:

HILFSSATZ 2.1. *Sei $g(\sigma, \mathsf{P}) > 0$ und stetig für $\sigma > 0$, P orthogonal (n-reihig); ist dann $g(\sigma_1\sigma_2, \mathsf{P}_1\mathsf{P}_2) = g(\sigma_1, \mathsf{P}_1) \cdot g(\sigma_2, \mathsf{P}_2)$, so gilt*

$$g(\sigma, \mathsf{P}) = \sigma^r \quad \textit{mit reellem } r.$$

BEWEIS. Ist E die n-reihige Einheitsmatrix, so gilt

$$g(1, \mathsf{E}) = 1 \qquad \big(\text{da } 0 < g(1, \mathsf{E}) = g(1^2, \mathsf{E}^2) = g^2(1, \mathsf{E})\big)$$

und daher wegen der Multiplikativität für ganzzahliges λ

$$g(\sigma^\lambda, \mathsf{E}) = g^\lambda(\sigma, \mathsf{E}) \quad \text{und} \quad g(1, \mathsf{P}^\lambda) = g^\lambda(1, \mathsf{P}).$$

Das liefert für $g_1(\sigma) = g(\sigma, \mathsf{E}) > 0$ wegen der Stetigkeit

$$g_1(\sigma) = \sigma^r \text{ mit reellem } r,$$

und ergibt für $g_2(\mathsf{P}) = g(1, \mathsf{P}) > 0$ wegen der Beschränktheit (g_2 ist stetig auf einer kompakten Teilmenge des $\mathfrak{R}_{n^2}$)

$$g_2(\mathsf{P}) = 1 \text{ für alle } \mathsf{P}.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus $g(\sigma, \mathsf{P}) = g_1(\sigma) \cdot g_2(\mathsf{P})$. ⌟

Nun läßt sich zeigen, daß die Gleichung (*) unter sehr geringen Zusatzbedingungen die Funktion φ bereits weitgehend festlegt:

SATZ 2.1. *$\varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{t})$ sei eine in jeder Variablen stetige reelle Funktion von $\mathfrak{y}, \mathfrak{t} \in \mathfrak{R}_n$ mit der Eigenschaft, daß $\psi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{t}) = E(\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{t}))$ für alle Multinomialverteilungen aus $\mathscr{F}_n$ die Relation (*) erfüllt und eine eindeutige Minimalstelle besitzt; dann gilt*

$$\varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{t}) = \gamma \cdot |\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^r \quad \textit{mit} \quad \gamma > 0 \quad \textit{und} \quad r > 1.$$

BEWEIS. 1. Für $F_{\mathfrak{a}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ verschwindet $\psi_{\mathfrak{a}_0}(\mathfrak{t})$ nicht identisch, so daß $0 \neq \psi_{\mathfrak{a}_0}(\mathfrak{t}_0) = \varphi(0, \mathfrak{t}_0)$ für geeignetes $\mathfrak{t}_0$, also

$$(6) \qquad \gamma(T; F_{\mathfrak{a}_0}) = \frac{\varphi(T0, T\mathfrak{t}_0)}{\varphi(0, \mathfrak{t}_0)} \qquad \big(\text{wegen } (*)\big).$$

Für zwei Transformationen $T_i \in \mathscr{T}_n$ mit $T_1 0 = 0$ gilt ferner

$$(7) \qquad \gamma(T_2 T_1; F_{\mathfrak{a}_0}) = \frac{1}{\psi_{\mathfrak{a}_0}(\mathfrak{t}_0)} \psi_{T_2 T_1 \mathfrak{a}_0}(T_2 T_1 \mathfrak{t}_0) = \gamma(T_2; F_{T_1\mathfrak{a}_0}) \frac{\psi_{T_1\mathfrak{a}_0}(T\mathfrak{t}_0)}{\psi_{\mathfrak{a}_0}(\mathfrak{t}_0)}$$
$$= \gamma(T_2; F_{\mathfrak{a}_0}) \cdot \gamma(T_1; F_{\mathfrak{a}_0}) \qquad (\text{wegen } F_{T_1\mathfrak{a}_0} = F_{\mathfrak{a}_0}).$$

Die Funktion $g(\sigma, \mathfrak{P}) = \gamma(T; F_{\mathfrak{a}_0}) > 0$ für $T\underline{x} = \sigma \mathfrak{P} \underline{x}$ ist also wegen (6) stetig und erfüllt wegen (7) die Bedingungsgleichung von Hilfssatz 2.1, so daß

$$g(\sigma, \mathfrak{P}) = \sigma^r \quad \text{mit reellem } r. \tag{8}$$

2. Ist $\vec{\alpha}_0$ ein fest gewählter Vektor mit $|\vec{\alpha}_0| = 1$, so existiert zu $\mathfrak{t}, \mathfrak{y}$ eine orthogonale Matrix $\mathfrak{P}_0$ mit $\mathfrak{t} - \mathfrak{y} = |\mathfrak{t} - \mathfrak{y}| \cdot \mathfrak{P}_0 \vec{\alpha}_0$. Das ergibt mit $T_1\underline{x} = |\mathfrak{t} - \mathfrak{y}| \mathfrak{P}_0 \underline{x}$ und $T_2\underline{x} = \underline{x} + \mathfrak{y}$ wegen (6) und (7)

$$\begin{aligned} (9) \qquad \varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{t}) &= \varphi(T_2 T_1 0; T_2 T_1 \vec{\alpha}_0) = \varphi(0, \vec{\alpha}_0) \cdot \gamma(T_2; F_{\mathfrak{a}_0}) \cdot g(|\mathfrak{t} - \mathfrak{y}|, \mathfrak{P}_0) \\ &= \gamma \cdot h(\mathfrak{y}) \cdot |\mathfrak{t} - \mathfrak{y}|^r \quad \text{(wegen (8))} \end{aligned}$$

mit $\gamma = \varphi(0, \vec{\alpha}_0)$ und $h(\vec{\tau}) = \gamma(T; F_{\mathfrak{a}_0}) > 0$ für $T\underline{x} = \underline{x} + \vec{\tau}$.
Dabei verschwinden die Konstanten γ und r nicht, da $\psi_{\mathfrak{a}_0}(\mathfrak{t})$ nach Voraussetzung nicht konstant ist.

3. Die Gleichung (*) liefert durch Einsetzen aus (9) für $F_{\mathfrak{a}_1} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\alpha}_0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ und $T_1\underline{x} = \sigma \mathfrak{P} \underline{x}$

$$(10) \quad \sigma^r \left(h(0) \cdot |\mathfrak{t}|^r + h(T_1 \vec{\alpha}_0) \cdot |\mathfrak{t} - \vec{\alpha}_0|^r\right) = \gamma(T_1; F_{\mathfrak{a}_1}) \left(h(0) \cdot |\mathfrak{t}|^r + h(\vec{\alpha}_0) \cdot |\mathfrak{t} - \vec{\alpha}_0|^r\right).$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von $|\mathfrak{t}|^r, |\mathfrak{t} - \vec{\alpha}_0|^r$ folgt aus (10)

$$\gamma(T_1; F_{\mathfrak{a}_1}) = \sigma^r \quad \text{und} \quad h(\sigma \mathfrak{P} \vec{\alpha}_0) = h(\vec{\alpha}_0),$$

d. h.

$$h(\vec{\tau}) = h(\vec{\alpha}_0) \quad \text{für} \quad \vec{\tau} \neq 0 \qquad (h(0) = 1),$$

also

$$h(\vec{\tau}) = 1 \quad \text{für alle } \vec{\tau} \qquad (\text{da } h \text{ stetig wegen (9)}).$$

Nun folgt für die Konstanten in (9) außerdem $\gamma > 0$ und $r > 1$, da $\psi_{\mathfrak{a}_1}(\mathfrak{t})$ andernfalls keine eindeutige Minimalstelle besitzt. ⌟

Zu untersuchen sind also die Funktionen $E(|\mathfrak{a} - \mathfrak{t}|^r)$ für $r > 1$.

Zuvor werden jedoch einige im folgenden wichtige Ungleichungen zusammengestellt:

HILFSSATZ 2.2. a) $E(|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2|^r) \leqq E(|\mathfrak{a}_1|^r) + E(|\mathfrak{a}_2|^r)$ *für* $0 < r < 1$,

b) $E^{\frac{1}{r}}(|\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2|^r) \leqq E^{\frac{1}{r}}(|\mathfrak{a}_1|^r) + E^{\frac{1}{r}}(|\mathfrak{a}_2|^r)$ *für* $r \geqq 1$,

c) $E(|\mathfrak{a} - \mathfrak{t}|^r) \geqq |E(\mathfrak{a}) - \mathfrak{t}|^r$ *für* $\mathfrak{t} \in \mathfrak{R}_n$ *und* $r \geqq 1$.

BEWEIS. a) Integration über die Ungleichung $(y_1 + y_2)^r \leqq y_1^r + y_2^r$ für $y_i \geqq 0$.

b) Folgerung aus der Dreiecksungleichung sowie der Ungleichung von MINKOWSKI.

c) Die konvexe Funktion $g(\mathfrak{y}) = |\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^r$ besitzt im Punkte $E(\mathfrak{a})$ eine Stützhyperebene, so daß mit geeigneten γ_ν

$$g(\mathfrak{y}) \geqq g(E(\mathfrak{a})) + \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu (y_\nu - E(a_\nu));$$

Übergang zum Erwartungswert ergibt die Behauptung.

Es empfiehlt sich, gewisse Teilmengen von $\mathfrak{F}_n$ auszuzeichnen:

DEFINITION 2.1. *Der Raum $\mathfrak{F}_n^r$ besteht aus den Vf. $F_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{F}_n$, für die $\mathfrak{a}$ r-integrierbar ist, d.h. $\mu_r(\mathfrak{a}) = E(|\mathfrak{a}|^r)$ definiert ist* $(r > 0)$.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Mengen sind:

SATZ 2.2. a) *$\mathfrak{F}_n^r$ fällt monoton mit wachsendem r.*

b) *$F_{\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n} \in \mathfrak{F}_n^r$ ist gleichwertig mit $F_{\mathfrak{a}_1}, \dots, F_{\mathfrak{a}_n} \in \mathfrak{F}_1^r$.*

c) *$\mathfrak{F}_n^r$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{F}_n$ bezüglich Konvergenz vom Grad r.*

BEWEIS. a) Für $r \leqq s$ gilt $|\mathfrak{a}|^r \leqq 1 + |\mathfrak{a}|^s$.

b) Hilfssatz 2.2a) und b) ergibt

$$\mu_r(\mathfrak{a}_\nu) \leqq \mu_r(\mathfrak{a}) \leqq \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} \mu_r(\mathfrak{a}_\nu) & \text{für } r < 1 \\ \left(\sum_{\nu=1}^{n} \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a}_\nu) \right)^r & \text{für } r \geqq 1. \end{cases}$$

c) Wie im Beweis zu Hilfssatz 1.1 folgt

$$\int_{[0,\gamma]} y \, d F_{|\mathfrak{a}|^r}(y) \leqq \int_0^\gamma \left(1 - F_{|\mathfrak{a}|^r}(y)\right) d y \leqq \int_0^\infty \left(1 - F_{|\mathfrak{a}_l|^r}(y)\right) d y + \int_0^\infty |F_{|\mathfrak{a}_l|^r}(y) - F_{|\mathfrak{a}|^r}(y)| \, d y$$
$$= \mu_r(\mathfrak{a}_l) + |F_{|\mathfrak{a}_l|^r}, F_{|\mathfrak{a}|^r}|;$$

$\gamma \to \infty$ ergibt wegen $F_{\mathfrak{a}_l} \xrightarrow{r} F_{\mathfrak{a}}$ die Behauptung. ⌟

Nun läßt sich über die Funktion $\mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t})$ eine wichtige Aussage machen:

HILFSSATZ 2.3. *Ist $\mathfrak{a}$ r-integrierbar mit $r > 1$, so besitzt die Funktion $\psi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{t}) = \mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t})$ eine eindeutige Minimalstelle.*

BEWEIS. 1. Nach Hilfssatz 2.2b) und c) gilt

$$(11) \qquad \left| \psi_{\mathfrak{a}}^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{t}_1) - \psi_{\mathfrak{a}}^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{t}_2) \right| \geqq E^{\frac{1}{r}}\left(|(\mathfrak{a} - \mathfrak{t}_1) - (\mathfrak{a} - \mathfrak{t}_2)|^r\right) = |\mathfrak{t}_1 - \mathfrak{t}_2|$$

und

$$\psi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{t}) \geqq |E(\mathfrak{a}) - \mathfrak{t}|^r,$$

d.h. $\psi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{t})$ ist stetig mit $\lim_{|\mathfrak{t}| \to \infty} \psi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{t}) = \infty$;
das sichert die Existenz einer Minimalstelle.

2. Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, daß $|\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^r$ für beliebiges $\mathfrak{y} \in \mathfrak{R}_n$ eine streng konvexe Funktion von $\mathfrak{t}$ ist, und daher auch $\psi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{t}) = \int_{\mathfrak{R}_n} |\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^r \, d F_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y})$ streng konvex ist. ⌟

Benötigt wird ferner eine Bedingung dafür, daß bei einer konvergenten Funktionenfolge die Minimalstellen und -werte ebenfalls konvergieren:

HILFSSATZ 2.4. *Besitzen die gleichgradig stetigen reellen Funktionen $g_\lambda(\mathfrak{x})$, $\lambda = 0, 1, \dots$, die gleichmäßig beschränkten eindeutigen Minimalstellen $\mathfrak{z}_\lambda \in \mathfrak{R}_n$, so folgt aus $\lim_{\lambda \to \infty} g_\lambda(\mathfrak{x}) = g_0(\mathfrak{x})$ auch*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathfrak{z}_\lambda = \mathfrak{z}_0 \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \to \infty} g_\lambda(\mathfrak{z}_\lambda) = g_0(\mathfrak{z}_0).$$

BEWEIS. Zunächst gilt für $|\mathfrak{x}| \leqq \gamma = \sup_{\lambda} |\mathfrak{z}_\lambda| < \infty$ und $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_0| \geqq \varepsilon > 0$ $g_0(\mathfrak{x}) > g_0(\mathfrak{z}_0) + 2\delta$ mit $\delta > 0$.

Für $|\mathfrak{x}| \leqq \gamma$ sind ferner die Funktionen g_λ gleichgradig gleichmäßig stetig, so daß die Konvergenz $g_\lambda \to g_0$ dort gleichmäßig ist.

Für hinreichend großes λ gilt also

$$|g_\lambda(\mathfrak{x}) - g_0(\mathfrak{x})| < \delta, \quad \text{falls} \quad |\mathfrak{x}| \leqq \gamma,$$

d.h.

$$g_\lambda(\mathfrak{x}) > g_0(\mathfrak{x}) - \delta > g_0(\mathfrak{z}_0) + \delta > g_\lambda(\mathfrak{z}_0) \quad \text{für} \quad |\mathfrak{x}| \leqq \gamma \quad \text{und} \quad |\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_0| \geqq \varepsilon.$$

Daher ist $|\mathfrak{z}_\lambda - \mathfrak{z}_0| < \varepsilon$ für hinreichend großes λ.

Die zweite Behauptung folgt nun wegen $g_\lambda(\mathfrak{z}_0) \to g_0(\mathfrak{z}_0)$ aus der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionen g_λ. ⌟

Nach Hilfssatz 2.3 ist es möglich, folgende Bezeichnung einzuführen:

DEFINITION 2.2. *Ist $F_\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}_n^r$ mit $r > 1$, so ist die „mittlere Lage r-ter Ordnung" zu $\mathfrak{a}$ die eindeutige Minimalstelle $L_r(\mathfrak{a})$ von $\mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t})$.*

Diese Bezeichnung wird gerechtfertigt durch folgenden Hauptsatz:

SATZ 2.3. *$L_r | \mathfrak{F}_p^r$ ist ein r-stetiger Lageparameter.*

BEWEIS. (L_1) Nach Hilfssatz 2.2b) gilt $\mu_r^{\frac{1}{r}}(\sigma \mathfrak{P}\mathfrak{a} + \vec{\tau}) \leqq \sigma \cdot \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a}) + |\vec{\tau}|$.

(L_2) $|\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^r$ ist Lösung der Gleichung (*).

(L_3) Zu beliebigem $\mathfrak{t}_1 \in \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{a})^*}$ existiert wegen der Abgeschlossenheit und Konvexität von $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})^*$ ein Punkt $\mathfrak{t}_2$ mit

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{t}_1| > |\mathfrak{y} - \mathfrak{t}_2| \text{ für alle } \mathfrak{y} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{a})^*;$$

also ist $L_r(\mathfrak{a}) \neq \mathfrak{t}_1$, da nach Satz 1.3

$$\mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t}_1) = \int_{\mathfrak{B}(\mathfrak{a})} |\mathfrak{y} - \mathfrak{t}_1|^r dF_\mathfrak{a}(\mathfrak{y}) > \int_{\mathfrak{B}(\mathfrak{a})} |\mathfrak{y} - \mathfrak{t}_2|^r dF_\mathfrak{a}(\mathfrak{y}) = \mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t}_2).$$

(L_4) $\mathfrak{F}_n^r \ni F_{\mathfrak{a}_l} \xrightarrow{r} F_{\mathfrak{a}_0} \in \mathfrak{F}_n^r$ liefert mit $\psi_l(\mathfrak{t}) = \mu_r(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{t})$

$$\lim_{l \to \infty} \psi_l^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{t}) = \psi_0^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{t}) \text{ für alle } \mathfrak{t} \quad \text{(vgl. Hilfssatz 1.1)}.$$

Die Funktionen $\psi_l^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{t})$ sind dabei wegen (11) gleichgradig stetig, und ihre Minimalstellen $L_r(\mathfrak{a}_l)$ sind gleichmäßig beschränkt, da nach Hilfssatz 2.2b)

$$|L_r(\mathfrak{a}_l)| \leqq E^{\frac{1}{r}}(|\mathfrak{a}_l - L_r(\mathfrak{a}_l)|^r) + E^{\frac{1}{r}}(|\mathfrak{a}_l|^r) \leqq 2\psi_l^{\frac{1}{r}}(0) \to 2\psi_0^{\frac{1}{r}}(0).$$

Anwendung von Hilfssatz 2.4 ergibt $L_r(\mathfrak{a}_l) \to L_r(\mathfrak{a}_0)$. ⌟

Der Definitionsbereich von L_r ist dabei nach Satz 2.2c) maximal, d.h. L_r läßt sich nicht auf natürliche Weise stetig erweitern.

Die Funktionale L_r hängen ferner stetig von ihrer Ordnung ab:

SATZ 2.4. *Ist $F_\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}_n^s$ mit $s > 1$, so ist $L_r(\mathfrak{a})$ stetig in r auf $(1, s)$.*

BEWEIS. Die Stetigkeit von $g(r) = \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a})$ ermöglicht es, den Beweis zu (L_4) von Satz 2.3 vollständig zu übertragen. ⌟

Eine Möglichkeit zur Bestimmung von L_r ist:

SATZ 2.5. *$L_r(\mathfrak{a})$ ist die eindeutige Nullstelle von $E(|\mathfrak{a} - \mathfrak{t}|^{r-2}(\mathfrak{a} - \mathfrak{t}))$.*

BEWEIS. Für $|\mathfrak{t}| \leqq \gamma$ (γ beliebig groß) wird $\frac{\partial}{\partial t_\nu} |\mathfrak{a} - \mathfrak{t}|^r$ wegen

$$\left| \frac{\partial}{\partial t_\nu} |\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^r \right| = |-r\,|\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^{r-2}(y_\nu - t_\nu)| \leqq r\,|\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^{r-1} \leqq r\,(|\mathfrak{y}| + \gamma)^{r-1}$$

gleichmäßig absolut majorisiert durch die integrierbare Funktion $r\,(|\mathfrak{a}| + \gamma)^{r-1}$; daher ist die folgende Differentiation unter dem Integral zulässig:

$$\frac{\partial}{\partial t_\nu} \mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t}) = \int_{\mathfrak{R}_n} \left(\frac{\partial}{\partial t_\nu} |\mathfrak{y} - \mathfrak{t}|^r \right) dF_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y}) = -r \cdot E\left(|\mathfrak{a} - \mathfrak{t}|^{r-2}(a_\nu - t_\nu)\right).$$

Da nach Hilfssatz 2.3 genau in der Minimalstelle $L_r(\mathfrak{a})$ alle partiellen Ableitungen von $\mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t})$ verschwinden, folgt daraus die Behauptung. ⌟

Die Lösung dieser Bedingungsgleichung ist im allgemeinen nur durch ein Näherungsverfahren möglich, das durch die Konvexität von $\mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t})$ erleichtert wird. Beispielsweise ist im Fall $n = 1$ für geradzahliges r die reelle Wurzel folgenden Polynoms zu bestimmen:

$$g(t) = \sum_{\mu=1}^{r} \binom{r-1}{\mu-1} E(a^{r-\mu})\, t^{\mu-1}.$$

Für $r = 2$ ergibt sich als Minimalstelle nach Satz 2.5 allgemein

$$L_2(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{a});$$

das folgt im übrigen auch aus $\mu_2(\mathfrak{a} - \mathfrak{t}) = \sum_{\nu=1}^{n} \mu_2(a_\nu - t_\nu)$.

L_2 wird unter den mittleren Lagen r-ter Ordnung durch zwei Eigenschaften ausgezeichnet; durch einfache Gegenbeispiele läßt sich zeigen, daß nur für $r = 2$ allgemein folgende Beziehungen bestehen:

1. $L_r(\mathsf{A}\mathfrak{a}) = \mathsf{A} L_r(\mathfrak{a})$ für jede lineare Transformation A.
2. $L_r(\mathfrak{a}) = \overrightarrow{L_r(a_\nu)}$ für $\mathfrak{a} = \vec{a}_\nu$.

Es soll nun noch kurz auf die Bedeutung des Minimalwertes von $\mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t})$ eingegangen werden; dabei empfiehlt sich folgende Normierung:

DEFINITION 2.3. *Die „mittlere Distanz r-ter Ordnung" zu $F_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{F}_n^r$ mit $r > 1$ ist*

$$k_r(\mathfrak{a}) = \min_{\mathfrak{t} \in \mathfrak{R}_n} \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a} - \mathfrak{t}) = \mu_r^{\frac{1}{r}}\left(\mathfrak{a} - L_r(\mathfrak{a})\right).$$

Mit Hilfe von k_r läßt sich L_r unter Anwendung von Hilfssatz 2.2c) mit dem Erwartungswert vergleichen:

$$|E(\mathfrak{a}) - L_r(\mathfrak{a})| \leqq \mu_r^{\frac{1}{r}}\left(\mathfrak{a} - L_r(\mathfrak{a})\right) = k_r(\mathfrak{a}).$$

Ferner läßt sich die Ungleichung von TSCHEBYSCHEFF verallgemeinern:

$$\mu_r\left(\mathfrak{a} - L_r(\mathfrak{a})\right) \geqq p\left(|\mathfrak{a} - L_r(\mathfrak{a})| \geqq \gamma\right) \cdot \gamma^r$$

ergibt

$$p\left(|\mathfrak{a} - L_r(\mathfrak{a})| \geqq \gamma\right) \leqq \left(\frac{k_r(\mathfrak{a})}{\gamma}\right)^r \quad \text{für} \quad \gamma > 0.$$

An Stelle des Minimalwertes von $\mu_r(\mathfrak{a}-\mathfrak{t})$ läßt sich auch ein Mittelwert definieren, indem $\mathfrak{t}$ selbst als zufälliger Vektor mit der Vf. $F_{\mathfrak{a}}$ betrachtet und der (nach Hilfssatz 2.2b) vorhandene) Erwartungswert gebildet wird. Dieser Mittelwert hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung: sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ unabhängig nach $F_{\mathfrak{a}}$ verteilt, so liefert der Satz von FUBINI

$$E\left(\mu_r(\mathfrak{a}-\mathfrak{t})\right) = \int\limits_{\mathfrak{R}_n}\int\limits_{\mathfrak{R}_n} |\mathfrak{y}-\mathfrak{t}|^r \, dF_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y})\, dF_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{t}) = E\left(|\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2|^r\right).$$

Eine Normierung wie in Definition 2.3 führt daraus zu:

DEFINITION 2.4. *Die „mittlere Differenz r-ter Ordnung" zu $F_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{F}_n^r$ mit $r>1$ ist*

$k_r'(\mathfrak{a}) = E^{\frac{1}{r}}\left(|\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2|^r\right)$, *wobei $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ unabhängig nach $F_{\mathfrak{a}}$ verteilt sind.*

Die wichtigsten gemeinsamen Eigenschaften der Funktionale k_r, k_r' sind:

SATZ 2.6. a) $k_r(\mathfrak{a}) \leqq k_r'(\mathfrak{a}) \leqq 2k_r(\mathfrak{a})$ *für* $F_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{F}_n^r$.

b) $k_r^{(\prime)}(\mathfrak{a})$ wächst für festes $\mathfrak{a}$ monoton in r.

c) $k_r^{(\prime)}(\mathfrak{a})$ ist für festes $\mathfrak{a}$ stetig in r.

d) $k_r^{(\prime)}(T\mathfrak{a}) = \sigma k_r^{(\prime)}(\mathfrak{a})$ für $T\underset{\sim}{x} = \sigma \mathsf{P}\underset{\sim}{x} + \vec{\tau}$ und $F_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{F}_n^r$.

e) $k_r^{(\prime)}(\mathfrak{a})$ verschwindet genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ n.W. konstant ist.

f) $k_r^{(\prime)}|\mathfrak{F}_n^r$ ist ein r-stetiges Funktional.

BEWEIS. a) Mit den Bezeichnungen aus Definition 2.4 gilt nach Hilfssatz 2.2b)

$$k_r(\mathfrak{a}) = \left(\min_{\mathfrak{y}\in\mathfrak{R}_n} \mu_r(\mathfrak{a}-\mathfrak{y})\right)^{\frac{1}{r}} \leqq \left(\int_{\mathfrak{R}_n} \mu_r(\mathfrak{a}-\mathfrak{y})\, dF_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y})\right)^{\frac{1}{r}} = k_r'(\mathfrak{a})$$

$$= \mu_r^{\frac{1}{r}}\left((\mathfrak{a}_1 - L_r(\mathfrak{a}_1)) - (\mathfrak{a}_2 - L_r(\mathfrak{a}_2))\right) \leqq \sum_{i=1,2} \mu_r^{\frac{1}{r}}\left(\mathfrak{a}_i - L_r(\mathfrak{a}_i)\right) = 2k_r(\mathfrak{a}).$$

b) Die Monotonie von $g(r) = \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a})$ überträgt sich auf $k_r^{(\prime)}$.

c) Für k_r folgt die Behauptung aus Hilfssatz 2.4 (vgl. Satz 2.4) und für k_r' aus der Stetigkeit der Funktion $g(r)$.

d) Trivial.

e) Ist $k_r'(\mathfrak{a}) = 0$, also wegen a) auch $k_r(\mathfrak{a}) = 0$, so folgt

$$|\mathfrak{a} - L_r(\mathfrak{a})|^r \overset{\text{n.W.}}{=} 0, \qquad \text{d.h.} \qquad \mathfrak{a} \overset{\text{n.W.}}{=} L_r(\mathfrak{a});$$

die Umkehrung ergibt sich unmittelbar.

f) k_r ist r-stetig nach Hilfssatz 2.4 (vgl. Satz 2.3); auf den etwas langwierigen Beweis dafür, daß auch k_r' r-stetig ist, wird hier verzichtet. ⌟

Wegen $k_r^{(\prime)} \geqq 0$ und der Eigenschaften d) bis f) lassen sich die Funktionale $k^{\prime}|\mathfrak{F}_n^r$ und $k_r'|\mathfrak{F}_n^r$ als „Konzentrationsmaße" bezeichnen (vgl. (L_2)–(L_4)); auf eine Axiomatisierung dieses Begriffes wird hier jedoch verzichtet.

Im Spezialfall $r=2$ folgt durch einfache Rechnung noch

$$k_2^2(\mathfrak{a}) = E\left(|\mathfrak{a}|^2\right) - |E(\mathfrak{a})|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} k_2^2(\mathfrak{a}_\nu) \qquad \text{und} \qquad k_2'(\mathfrak{a}) = \sqrt{2}\cdot k_2(\mathfrak{a}).$$

§ 3. Einige Grenzfälle

Zur Untersuchung der Funktion $\mu_r(\mathfrak{a}-\mathfrak{t})$ für $r=1$ wird zunächst für n-dimensionale Vf. folgende Bezeichnung eingeführt:

DEFINITION 3.1. $\mathfrak{t}_0$ *ist „Median" des 1-integrierbaren zufälligen Vektors* $\mathfrak{a}$ $\left(\mathfrak{t}_0 = M(\mathfrak{a})\right)$, *falls* $\mathfrak{t}_0$ *Minimalstelle von* $\mu_1(\mathfrak{a}-\mathfrak{t})$ *ist.*

Diese Definition ist für $n>1$ im allgemeinen eindeutig:

SATZ 3.1. *Ist* dim $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})^\varkappa > 1$, *so ist* $M(\mathfrak{a})$ *eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Da sich die Existenz eines Medians wie im Beweis zu Hilfssatz 2.3 ergibt, genügt der Nachweis der strengen Konvexität von $\mu_1(\mathfrak{a}-\mathfrak{t})$. Zu $\mathfrak{t}_1 \neq \mathfrak{t}_2$ existiert nach Voraussetzung $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ mit

$$|(\mathfrak{x}-\mathfrak{t}_1)+(\mathfrak{x}-\mathfrak{t}_2)| < |\mathfrak{x}-\mathfrak{t}_1| + |\mathfrak{x}-\mathfrak{t}_2|,$$

da andernfalls $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ eine Teilmenge der Geraden durch $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ ist, d.h. dim $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})^\varkappa \leqq 1$; daher existiert eine Umgebung $\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ mit $p\left(\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}(\mathfrak{x})\right) > 0$ derart, daß

$$|(\mathfrak{y}-\mathfrak{t}_1)+(\mathfrak{y}-\mathfrak{t}_2)| \lesseqgtr |\mathfrak{y}-\mathfrak{t}_1| + |\mathfrak{y}-\mathfrak{t}_2| \quad \text{für} \quad \mathfrak{y} \overset{\subset}{\neq} \mathfrak{G}(\mathfrak{x}),$$

so daß also

$$\mu_1\left(\mathfrak{a}-\frac{\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\mu_1\left((\mathfrak{a}-\mathfrak{t}_1)+(\mathfrak{a}-\mathfrak{t}_2)\right) < \frac{1}{2}\left(\mu_1(\mathfrak{a}-\mathfrak{t}_1)+\mu_1(\mathfrak{a}-\mathfrak{t}_2)\right).$$

Wegen der Stetigkeit ist $\mu_1(\mathfrak{a}-\mathfrak{t})$ also streng konvex. ⌟

Ist dim $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})^\varkappa \leqq 1$, so läßt sich das Eindeutigkeitsproblem durch eine Bewegung auf den Fall $n=1$ zurückführen. Hier bildet die Gesamtheit aller Stellen $M(a)$ also ein abgeschlossenes Intervall:

DEFINITION 3.2. *Das „Medianintervall" der 1-integrierbaren zufälligen Variablen a ist die Gesamtheit* $\mathfrak{J}(a)$ *der Minimalstellen von* $\mu_1(a-t)$.

$\mathfrak{J}(a)$ läßt sich in Übereinstimmung mit der üblichen Definition des Medians folgendermaßen beschreiben:

SATZ 3.2. $\mathfrak{J}(a) = \{t: p(a<t) \leqq \frac{1}{2} \leqq p(a>t)\}$.

BEWEIS. Eine einfache Umformung ergibt

$$(12)\quad \begin{cases} \mu_1(a-t)-\mu_1(a-t_0) \\ \qquad = 2\cdot \begin{cases} (t_0-t)\left(\frac{1}{2}-p(a<t_0)\right) + \int\limits_{(t,\,t_0)} (y-t)\,dF_a(y) & \text{für} \quad t<t_0 \\ (t-t_0)\left(\frac{1}{2}-p(a>t_0)\right) + \int\limits_{(t_0,\,t)} (t-y)\,dF_a(y) & \text{für} \quad t>t_0. \end{cases} \end{cases}$$

Ist $p(a<t_0) \leqq \frac{1}{2} \geqq p(a>t_0)$, so ist diese Differenz für kein t negativ, also t_0 Minimalstelle von $\mu_1(a-t)$.

Ist umgekehrt t eine beliebige Minimalstelle von $\mu_1(a-t)$, so liefert (12) für ein t_0 mit $F_a(t_0-0) \leqq \frac{1}{2} \leqq F_a(t_0)$, falls

$$\begin{array}{lllll} t<t_0: & p(a<t_0)=\frac{1}{2} & \text{und} & p(t<a<t_0)=0, & \text{also} \\ & p(a<t) \leqq \frac{1}{2} & \text{und} & p(a>t)=1-p(a<t_0)=\frac{1}{2}; & \\ t>t_0: & p(a>t_0)=\frac{1}{2} & \text{und} & p(t_0<a<t)=0, & \text{also} \\ & p(a>t) \leqq \frac{1}{2} & \text{und} & p(a<t)=1-p(a>t_0)=\frac{1}{2}. & \end{array}$$ ⌟

Um auch im Fall $n=1$ einen eindeutigen Median definieren zu können, ist es notwendig, $\mu_r(a)$ an der Stelle $r=1$ in eine Potenzreihe zu entwickeln:

HILFSSATZ 3.1. *Ist a s-integrierbar mit $1<s\leqq 2$, so gilt*

$$\mu_r(a)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(r-1)^\lambda}{\lambda!}E(|a|\cdot\log^\lambda|a|)\quad \textit{für}\quad 1\leqq r\leqq s.$$

BEWEIS. Entwicklung in eine Exponentialreihe ergibt für $r>0$

$$|x|^r=|x|\cdot e^{(r-1)\log|x|}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(r-1)^\lambda}{\lambda!}|x|\log^\lambda|x| \tag{13}$$

gültig auch für $x=0$, da $\lim\limits_{x\downarrow 0} x\log^\lambda x=0$ für $\lambda>0$.

Für $1\leqq r\leqq s$ gilt dabei die Abschätzung

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m}\frac{(r-1)^\mu}{\mu!}|x|\log^\mu|x|\right|\leqq\sum_{\mu=1}^{m}\frac{(s-1)^\mu}{\mu!}|x|\cdot|\log^\mu|x||$$
$$\leqq|x|e^{(s-1)|\log|x||}=|x|\max\{|x|^{s-1},|x|^{1-s}\}\leqq|x|^s+|x|^{2-s}.$$

Daher werden in der Reihendarstellung von $|a|^r$ die Partialsummen gleichmäßig absolut majorisiert durch die integrierbare Funktion $|a|^s+|a|^{2-s}$, so daß nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz bei der Bestimmung von $\mu_1(a)$ Integration und Summation vertauschbar sind. ⌟

Wichtig ist daher das Verhalten der Funktion $E(|a-t|\log|a-t|)$:

HILFSSATZ 3.2. *Ist $a\log|a|$ integrierbar, so besitzt die Funktion $\chi(t)=E(|a-t|\log|a-t|)$ auf $\mathfrak{Z}(a)$ eine eindeutige Minimalstelle.*

BEWEIS. Wegen der leicht beweisbaren Stetigkeit von χ genügt der Nachweis der strengen Konvexität von χ auf $\mathfrak{Z}(a)^\circ$.

Ist dabei $\mathfrak{Z}(a)=[\alpha,\beta]$, so gilt nach Satz 3.2

$$p(a\leqq\alpha)=1-p(a>\alpha)\geqq\tfrac{1}{2}\quad\text{und}\quad p(a\geqq\beta)=1-p(a<\beta)\geqq\tfrac{1}{2},$$

d.h.

$$p(\alpha<a<\beta)=0.$$

Daher ergibt sich χ bereits durch Integration über $\overline{\mathfrak{Z}(a)^\circ}$, so daß für $t\in\mathfrak{Z}(a)^\circ$ nachfolgende Vertauschungen von Differentiation und Integration zulässig sind:

$$\frac{d}{dt}\chi(t)=\int\limits_{\overline{\mathfrak{Z}(a)^\circ}}\frac{\partial}{\partial t}\left(|y-t|\log|y-t|\right)dF_a(y)=E\left(\operatorname{sgn}(t-a)+\operatorname{sgn}(t-a)\log|a-t|\right);$$

wegen $t=M(a)$ und $p(a=t)=0$ gilt dabei nach Satz 3.2

$$E\left(\operatorname{sgn}(t-a)\right)=p(a<t)-p(a>t)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=0$$

und damit

$$\frac{d^2}{dt^2}\chi(t)=\int\limits_{\overline{\mathfrak{Z}(a)^\circ}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{sgn}(t-y)\log|y-t|\right)dF_a(y)=E\left(\frac{1}{|a-t|}\right).$$

Für $t\in\mathfrak{Z}(a)^\circ$ ist also $\dfrac{d^2}{dt^2}\chi(t)>0$.

Damit ist es möglich, einen Punkt von $\mathfrak{Z}(a)$ auszuzeichnen:

DEFINITION 3.3. *Ist a* $\log|a|$ *integrierbar, so ist der „Hauptmedian" von a die eindeutige Minimalstelle* $H(a)$ *von* $E(|a-t|\log|a-t|)$ *auf* $\mathfrak{Z}(a)$.

Der Definitionsbereich von H umfaßt dabei $\sum_{r>1}\mathscr{F}_1^r$, ist jedoch eine echte Teilmenge von $\mathscr{F}_1^1$, wie die zufällige Variable mit der Dichte

$$f_a(y) = \gamma\cdot(y\log y)^{-2} \qquad \text{für } y \geqq e \ (=0 \text{ sonst})$$

zeigt. Ferner ist $H(a)$ im allgemeinen nur eine relative Minimalstelle auf $\mathfrak{Z}(a)$; für $F_a = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ sind beispielsweise $\pm\frac{1}{e}$ die absoluten Minimalstellen.

Die Bezeichnung von H wird gerechtfertigt durch folgende Grenzbeziehung:

SATZ 3.3. *Es ist* $H(a) = \lim_{r\downarrow 1} L_r(a)$, *falls* $F_a \in \mathscr{F}_1^s$ *mit* $s>1$.

BEWEIS. Mit $\chi(t) = E(|a-t|\log|a-t|)$ ergibt Hilfssatz 3.1 für $1 \leqq r \leqq \min\{s, 2\}$

$$\mu_r(a-t) = \mu_1(a-t) + (r-1)\,\chi(t) + \sum_{\lambda>1}\frac{(r-1)^\lambda}{\lambda!}E\big(|a-t|\log^\lambda|a-t|\big).$$

Für $t \neq H(a)$ gilt also wegen der Stetigkeit dieser Potenzreihe in r

$$\mu_r(a-t) > \mu_r\big(a-H(a)\big) \qquad \text{für hinreichend kleines } r>1$$

(für $t \in \overline{\mathfrak{Z}(a)}$ nach Definition des Medianintervalls und für $t \in \mathfrak{Z}(a)$ nach Definition des Hauptmedians). Zu $\varepsilon>0$ existiert daher $r_0>1$ mit

$$\mu_r(a-t) > \mu_r\big(a-H(a)\big) \quad \text{für } 1<r<r_0 \quad \text{und} \quad t = H(a)\pm\varepsilon,$$

so daß wegen der Konvexität von $\mu_r(a-t)$

$$|L_r(a) - H(a)| < \varepsilon \qquad \text{für } 1<r<r_0. \qquad \square$$

Im häufig vorliegenden Fall einer Laplace-Verteilung $F_a = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_k\\ p & \cdots & p\end{bmatrix}$ mit $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_k$ gilt für ungerades k nach Satz 3.2 $H(a) = \alpha_{\frac{k+1}{2}}$; für gerades k genügt $H(a)$ einer einfachen algebraischen Gleichung:

SATZ 3.4. *Sei* $F_a = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_{2k}\\ p & \cdots & p\end{bmatrix}$ *mit* $\alpha_1 \leqq \cdots \leqq \alpha_{2k}$; *dann ist* $H(a)$ *die eindeutige Lösung von* $\prod_{\varkappa\leqq k}(t-\alpha_\varkappa) = \prod_{\varkappa>k}(\alpha_\varkappa - t)$ *auf* $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.

BEWEIS. Nach Satz 3.2 ist $\mathfrak{Z}(a) = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, also für $\alpha_k = \alpha_{k+1}$ nichts zu beweisen; andernfalls ist für $t \in (\alpha_k, \alpha_{k+1})$ mit $\chi(t) = E(|a-t|\log|a-t|)$

$$\chi'(t) = \frac{1}{p}\Big(\sum_{\varkappa\leqq k}\log(t-\alpha_\varkappa) - \sum_{\varkappa>k}\log(\alpha_\varkappa - t)\Big),$$

also

$$\lim_{t\downarrow\alpha_k}\chi'(t) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\uparrow\alpha_{k+1}}\chi'(t) = +\infty.$$

Daher ist $H(a)$ nach Hilfssatz 3.2 eindeutige Nullstelle von $\chi'(t)$ auf $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$; Übergang zur Exponentialfunktion ergibt die Behauptung. ⌟

Abschließend sei noch untersucht, wie weit der Hauptmedian auf $\mathfrak{F} = \sum_{r>1}^{*} \mathfrak{F}_1^r$ die Forderungen an einen Lageparameter erfüllt:

(L_1) gilt für $\mathfrak{F}_1^r$, also auch füs $\mathfrak{F}$.

(L_2) folgt aus Satz 3.3 wegen der Stetigkeit von $T \in \mathfrak{T}_n$.

(L_3) folgt aus Satz 3.3 wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{B}(a)^*$.

Dagegen ist H für kein $r > 0$ r-stetig;

Gegenbeispiel: $F_{a_l} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{l+1}{2l} & \frac{l-1}{2l} \end{bmatrix} \xrightarrow{r} F_a = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ für jedes r;

hier ist stets $H(a_l) = 0$, jedoch $H(a) = 1$.

Der Grenzübergang $r \downarrow 1$ ergibt für die Konzentrationsmaße k_r, k_r' als Grenzwerte unmittelbar:

$$k_1(\mathfrak{a}) = \min_{t \in \mathfrak{R}_a} \mu_1(\mathfrak{a} - t) \qquad \text{bzw.}$$

$k_1'(\mathfrak{a}) = E(|\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2|)$, wobei $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ unabhängig nach $F_{\mathfrak{a}}$ verteilt sind.

Insbesondere für eindimensionale Vf. sind das die mittlere absolute Abweichung bzw. das Konzentrationsmaß von GINI, die sich auch als Abstand gewisses Vf. deuten lassen:

SATZ 3.5. a) $k_1(a) = |F_a, F_{M(a)}|$ *mit* $F_{M(a)} = \begin{bmatrix} M(a) \\ 1 \end{bmatrix}$,

b) $k_1'(a) = 2|F_a, F_a^2|$ *mit* $(F_a^2)(y) = (F_a(y))^2$.

BEWEIS. a) Ist t_0 ein beliebiger Median von a, so folgt wegen (2)

$$k_1(a) = \mu_1(a - t_0) = \int_0^\infty \left(1 - F_{|a-t_0|}(y)\right) dy$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - F_a(t_0 + y) + F_a(t_0 - y - 0)\right) dy = \int_{-\infty}^{t_0} \left(F_a(y) - 0\right) dy + \int_{t_0}^\infty \left(1 - F_a(y)\right) dy$$

$$= |F_a, F_{t_0}|.$$

b) Die Behauptung folgt sofort aus des bekannten Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E\left(|a - t|\right) dF_a(t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_a(y)\left(1 - F_a(y)\right) dy$$

(diese ergibt sich wegen (2) ohne weiteres durch Anwendung des Satzes von FUBINI). ⌟

Die Lage eines n-dimensionalen zufälligen Vektors $\mathfrak{a}$ läßt sich von einem mehr statistischen Standpunkt aus auch folgendermaßen charakterisieren: Angegeben wird ein Punkt derart, daß die bei einer Realisation von $\mathfrak{a}$ maximale Abweichung davon minimal ist — wobei als mögliche Ergebnisse von $\mathfrak{a}$ die Punkte des Variationsbereiches betrachtet werden; gesucht sind also die

Minimalstellen von $\sup_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})}|\mathfrak{x}-\mathfrak{t}|$, wobei sich das Supremum wegen

$$\left|\sum_{\mu=0}^{n}\vartheta_\mu\mathfrak{x}_\mu-\mathfrak{t}\right|\leqq\sum_{\mu=0}^{n}\vartheta_\mu|\mathfrak{x}_\mu-\mathfrak{t}|\leqq\sup_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})}|\mathfrak{x}-\mathfrak{t}|\quad\text{für}\quad\sum_{\mu=0}^{n}\vartheta_\mu=1,\ \vartheta_\mu\geqq 0$$

auch auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})^*$ bestimmen läßt.

Ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ beschränkt, so gibt es genau einen Punkt, der die genannte Bedingung befriedigt:

HILFSSATZ 3.3. *Ist $\mathfrak{M}\neq 0$ eine kompakte Teilmenge des $\mathfrak{R}_n$, so besitzt die Funktion $\varrho(\mathfrak{t})=\max_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{M}}|\mathfrak{x}-\mathfrak{t}|$ eine eindeutige Minimalstelle.*

BEWEIS. 1. Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$|\varrho(\mathfrak{t}_1)-\varrho(\mathfrak{t}_2)|\leqq|\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_2| \tag{14}$$

und

$$\varrho(\mathfrak{t})\geqq|\mathfrak{t}|-|\mathfrak{x}|\quad\text{für}\quad\mathfrak{x}\in\mathfrak{M},$$

d.h. $\varrho(\mathfrak{t})$ ist stetig mit $\lim_{|\mathfrak{t}|\to\infty}\varrho(\mathfrak{t})=\infty$;
das sichert die Existenz einer Minimalstelle.

2. Ist $\varrho(\mathfrak{t}_1)=\varrho(\mathfrak{t}_2)$ und $\varrho\left(\frac{\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2}{2}\right)=\left|\mathfrak{x}_0-\frac{\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2}{2}\right|$, so gilt

$$\varrho\left(\frac{\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}\left(|\mathfrak{x}_0-\mathfrak{t}_1|+|\mathfrak{x}_0-\mathfrak{t}_2|\right)\leqq\frac{\varrho(\mathfrak{t}_1)+\varrho(\mathfrak{t}_2)}{2}.$$

Besteht dabei in beiden Ungleichungen Gleichheit, so liegt $\mathfrak{x}_0$ auf der Geraden durch $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, und es ist $|\mathfrak{x}_0-\mathfrak{t}_1|=\varrho(\mathfrak{t}_1)=\varrho(\mathfrak{t}_2)=|\mathfrak{x}_0-\mathfrak{t}_2|$; in diesem Fall gilt also $\mathfrak{x}_0-\mathfrak{t}_1=\mathfrak{x}_0-\mathfrak{t}_2$.
Daher ist $\varrho\left(\frac{\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2}{2}\right)<\varrho(\mathfrak{t}_i)$ für $\varrho(\mathfrak{t}_1)=\varrho(\mathfrak{t}_2)$ und $\mathfrak{t}_1\neq\mathfrak{t}_2$, und daraus folgt die Eindeutigkeit der Minimalstelle.

Damit ist folgende Bezeichnung möglich:

DEFINITION 3.4. *Ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ beschränkt, so ist das „Zentrum" von $\mathfrak{a}$ die eindeutige Minimalstelle $Z(\mathfrak{a})$ von $\max_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})}|\mathfrak{x}-\mathfrak{t}|$.*

Anschaulich ist $Z(\mathfrak{a})$ also der Mittelpunkt der kleinsten abgeschlossenen Kugel $\mathfrak{K}$ mit $p(\mathfrak{a}\in\mathfrak{K})=1$ und berücksichtigt daher lediglich, wo — und nicht wie — die Wahrscheinlichkeit verteilt ist.

Auch Z ergibt sich durch einen Grenzprozeß aus den mittleren Lagen r-ter Ordnung:

SATZ 3.6. *Es ist $Z(\mathfrak{a})=\lim_{r\to\infty}L_r(\mathfrak{a})$, falls $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ beschränkt ist.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist $F_{\mathfrak{a}}\in\mathfrak{F}_n'$, d.h. $L_r(\mathfrak{a})$ ist definiert für alle r. Für $\varrho(\mathfrak{t})=\max_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})}|\mathfrak{x}-\mathfrak{t}|>0$ gilt dabei mit $0<\vartheta<1$

$$\left(\vartheta\cdot\varrho(\mathfrak{t})\right)^r\cdot p\left(|\mathfrak{a}-\mathfrak{t}|>\vartheta\cdot\varrho(\mathfrak{t})\right)\leqq\int_{\mathfrak{B}(\mathfrak{a})}|\mathfrak{y}-\mathfrak{t}|^r\,dF_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y})\leqq\left(\max_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})}|\mathfrak{x}-\mathfrak{t}|\right)^r,$$

d.h.

$$\vartheta\cdot\varrho(\mathfrak{t})\cdot p_0^{\frac{1}{r}}\leqq\mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a}-\mathfrak{t})\leqq\varrho(\mathfrak{t})\quad\text{mit}\quad p_0=p\left(|\mathfrak{a}-\mathfrak{t}|>\vartheta\cdot\varrho(\mathfrak{t})\right)>0,$$

da andernfalls $\max_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})} |\mathfrak{x}-\mathfrak{t}| \leqq \vartheta\cdot\varrho(\mathfrak{t})$; das ergibt

$$\vartheta\cdot\varrho(\mathfrak{t}) \leqq \varliminf_{r\to\infty} \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a}-\mathfrak{t}) \leqq \varlimsup_{r\to\infty} \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a}-\mathfrak{t}) \leqq \varrho(\mathfrak{t}),$$

also für $\vartheta\uparrow 1$

$$\lim_{r\to\infty} \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a}-\mathfrak{t}) = \varrho(\mathfrak{t}) \qquad (\text{auch für } \varrho(\mathfrak{t})=0). \tag{15}$$

Da die Funktionen $\mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a}-\mathfrak{t})$ und $\varrho(\mathfrak{t})$ wegen (11) und (14) gleichgradig stetig und ihre Minimalstellen wegen $L_r(\mathfrak{a})\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})^*$ gleichmäßig beschränkt sind, ergibt Anwendung von Hilfssatz 2.4 $L_r(\mathfrak{a})\to Z(\mathfrak{a})$. ⌟

Nun läßt sich wieder prüfen, wie weit das Zentrum auf der Gesamtheit $\mathfrak{F}=\{F_{\mathfrak{a}}\in\mathfrak{F}_n : \mathfrak{B}(\mathfrak{a}) \text{ beschränkt}\}$ die Forderungen an einen Lageparameter erfüllt: $(L_1)-(L_3)$ gelten wegen $\mathfrak{B}(T\mathfrak{a})=T\,\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$.
Dagegen ist Z für kein $r>0$ r-stetig;

Gegenbeispiel: $F_{a_l}=\begin{bmatrix} & 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2l} & \frac{1}{2l}\end{bmatrix} \xrightarrow{r} F_a=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ für jedes r;

hier ist stets $Z(a_l)=1$, jedoch $Z(a)=0$.

Um auch das Verhalten der Konzentrationsmaße k_r, k_r' für $r\to\infty$ klären zu können, sind zwei neue Begriffe erforderlich. Die vorangegangenen Untersuchungen der Funktion $\sup_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})} |\mathfrak{x}-\mathfrak{t}|$ führen zunächst zu folgender Bezeichnung:

Definition 3.5. *Der „Radius" des zufälligen Vektors* $\mathfrak{a}$ *ist die Zahl*

$$r(\mathfrak{a}) = \inf_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{R}_n} \sup_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})} |\mathfrak{x}-\mathfrak{t}|.$$

Daneben wird benötigt:

Definition 3.6. *Der „Durchmesser" des zufälligen Vektors* $\mathfrak{a}$ *ist die Zahl*

$$d(\mathfrak{a}) = \sup_{\mathfrak{x}_i\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a})} |\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2|.$$

Im Fall $n=1$ ist der Durchmesser von a die Spannweite:

$$d(a) = \sup\{y: F_a(y)<1\} - \inf\{y: F_a(y)>0\} = 2r(a).$$

Es bestehen nun folgende Limesrelationen:

Satz 3.7. a) $\lim_{r\to\infty} k_r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{a})$
b) $\lim_{r\to\infty} k_r'(\mathfrak{a}) = d(\mathfrak{a})$
für $F_{\mathfrak{a}}\in\prod_{r>0}\mathfrak{F}_n'$.

Beweis. 1. Fall: $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ beschränkt.

a) Die Behauptung folgt aus Hilfssatz 2.4 (vgl. Satz 3.6).

b) Mit den Bezeichnungen aus Definition 2.4 liefert (15)

$$\lim_{r\to\infty} k_r'(\mathfrak{a}) = \lim_{r\to\infty} \mu_r^{\frac{1}{r}}(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2) = \max_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2)} |\mathfrak{x}-0|;$$

wegen $F_{\mathfrak{a}_i} = F_{\mathfrak{a}}$ und der Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gilt dabei

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2) = \{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_i \in \mathfrak{B}(\mathfrak{a})\},$$

d.h.

$$\lim_{r \to \infty} k'_r(\mathfrak{a}) = \max_{\mathfrak{x}_i \in \mathfrak{B}(\mathfrak{a})} |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2| = d(\mathfrak{a}).$$

2. Fall: $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ nicht beschränkt.

Da $r(\mathfrak{a}) = \infty = d(\mathfrak{a})$, genügt nach Satz 2.6a) der Nachweis der zweiten Relation; diese ergibt sich sofort daraus, daß (15) auch bei nicht beschränktem $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ gilt (im Beweis tritt $\gamma > 0$ an die Stelle von $\vartheta \cdot \varrho(\mathfrak{t})$ mit $\gamma \to \infty$ statt $\vartheta \uparrow 1$). ⌟

Abschließend sei ohne Beweis noch erwähnt, daß sich auch der Modus aus verallgemeinerten mittleren Lagen r-ter Ordnung gewinnen läßt:

im Falle einer diskreten Verteilung als Grenzwert einer beliebigen Folge von Minimalstellen von $\mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t})$ für $r \downarrow 0$;

im Falle einer stetigen Dichte als Grenzwert einer beliebigen Folge von Maximalstellen von $\mu_r(\mathfrak{a} - \mathfrak{t})$ für $r \downarrow -n$.

München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 19. Mai 1959)

LEEUW, K. DE
Math. Zeitschr. 73, 219–234 (1960)

On the Adjoint Semigroup and Some Problems in the Theory of Approximation

By
KAREL DE LEEUW[1])

1. Introduction

In a series of papers ([1] through [6]) P. L. BUTZER has studied the application of semigroup methods to a class of problems in the theory of approximation. Typical of his results is the following: For each $t>0$ define the mapping

$$T_t: L_p(-\infty, +\infty) \to L_p(-\infty, +\infty)$$

by

$$(T_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, e^{-y^2/t}\, dy.$$

Then if $1<p<\infty$,

$$\|T_t f - f\|_{L_p} = O(t) \qquad \text{as } t \to 0$$

if and only if f and f' are absolutely continuous and f'' is in $L_p(-\infty, +\infty)$. Furthermore if

$$\|T_t f - f\|_{L_p} = o(t) \qquad \text{as } t \to 0,$$

then f is identically zero.

Because of this result

$$\{f: f \in L_p(-\infty, +\infty),\ f \text{ and } f' \text{ absolutely continuous and } f'' \text{ in } L_p(-\infty, +\infty)\}$$

is the *saturation class* (see [8], p. 287) for the approximation method $\{T_t\}$.

The basic theorem from which most of his results follow is valid only for reflexive Banach spaces and so does not yield an identification of the saturation classes for the extreme values $p=1$ and $p=\infty$. In this paper we identify some of these saturation classes by consideration of the appropriate adjoint semigroup.

The following section is devoted to the necessary general semigroup results. These results are applied in Section 3 to obtain some identifications of Lipschitz classes due to HARDY and LITTLEWOOD, and in the remaining sections are applied to identify saturation classes.

2. Some semigroup theorems

In this section we establish some general results concerning semigroups of operators that will be used in the following sections to identify saturation classes.

[1]) This work was supported by the U. S. Air Force Office of Scientific Research.

Let B be a Banach space supplied with norm $\|\cdot\|$, and

$$S=\{T_t: 0\leqq t<\infty\}$$

a family of bounded linear operators on B that satisfies the following:

a. $T_0 x = x$, all x in B;

b. $T_{s+t}=T_s T_t$, $0\leqq s,t<\infty$;

c. $\|T_t x\|\leqq K\|x\|$, all x in B, $0\leqq t<\infty$;

d. $\lim_{t\to s}\|T_s x - T_t x\|=0$, all x in B, $0\leqq s<\infty$.

In the terminology of [9], S is a uniformly bounded, strongly continuous semigroup of operators on B. In all that follows we shall use freely the basic results established in [9] concerning such semigroups.

The *infinitesimal generator* D of S is defined as follows: it has as its domain $\mathcal{D}(D)$ the linear subspace of B consisting of all x which are such that

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_t x - x)$$

exists in the norm topology, and Dx is defined to be that limit. For our purposes the main results concerning the infinitesimal generator are the following (see [9], p. 308)

LEMMA 2.1. *For each* $t\geqq 0$, $T_t(\mathcal{D}(D))\subset\mathcal{D}(D)$, *and* $DT_t x = T_t Dx$ *for all* x *in* $\mathcal{D}(D)$. *If* x *is in* $\mathcal{D}(D)$ *and* $t\geqq 0$, *then*

$$T_t x - x=\int_0^t T_s Dx\,ds \qquad \text{(Bochner integral)}.$$

Using this it is immediate that if x is in $\mathcal{D}(D)$, then

$$\|T_t x - x\| = O(t) \qquad \text{as } t\to 0. \tag{2.1}$$

BUTZER showed in [3] that conversely if B is *reflexive*, then for any x in B (2.1) implies that x is in $\mathcal{D}(D)$. Thus if B is reflexive, (2.1) holds *if and only if* x is in $\mathcal{D}(D)$, and this is the result that yields BUTZER's identifications of saturation classes.

This simple situation does not extend beyond the reflexive case; if B is not reflexive it will in general contain elements x which are not in $\mathcal{D}(D)$ but which satisfy (2.1). However we shall see that for *adjoint semigroups* approximation of order $O(t)$ is equivalent to being in the domain of the appropriate infinitesimal generator, and this will allow us to identify saturation classes that are not covered by BUTZER's method.

Let B^* be the dual space of B; i.e. the space of all bounded linear functionals on B. The pairing between B^* and B will be denoted by $\langle\cdot,\cdot\rangle$. B^* is a Banach space under the norm (also denoted by $\|\cdot\|$) defined by

$$\|F\|=\sup_{\substack{x\in B\\ \|x\|\leqq 1}}|\langle F, x\rangle|.$$

We define the *adjoint* of the semigroup S to be the family

$$S^* = \{T_t^* : 0 \leqq t < \infty\}$$

of operators on B^*, where T_t^*, the adjoint of T_t, is the operator defined by

$$\langle T_t^* F, x\rangle = \langle F, T_t x\rangle, \qquad \text{all } x \text{ in } B, F \text{ in } B^*.$$

(Note that S^* is *not* the same as the adjoint semigroup discussed in Chapter 14 of [9].) This family of adjoint operators satisfies the following:

a*. $T_0^* F = F$, all F in B^*;

b*. $T_{s+t}^* = T_s^* T_t^*$, $0 \leqq s, t < \infty$;

c*. $\|T_t^* F\| \leqq K\|F\|$, all F in B^*, $0 \leqq t < \infty$.

The direct analogue of condition *d* is false; it is not true in general that the mapping $t \to T_t^* F$ is continuous from the reals to the norm topology of B^*. However we have

d*. $\lim_{t \to s} |\langle T_s^* F, x\rangle - \langle T_t^* F, x\rangle| = 0$, all x in B, F in B^*, $0 \leqq s < \infty$.

In other words, the mapping $t \to T_t^* F$ is continuous from the reals to the weak* topology of B^* (for the weak* topology, see Section 2.10 of [9]).

If U is a linear mapping

$$U : \mathscr{D}(U) \to B,$$

where $\mathscr{D}(U)$ is a dense linear subspace of B, its *adjoint* U^* is defined as follows: Its domain $\mathscr{D}(U^*)$ consists of all F in B^* for which there is a G in B^* with

$$\langle G, x\rangle = \langle F, Ux\rangle, \qquad \text{all } x \text{ in } \mathscr{D}(U), \tag{2.2}$$

and $U^* F$ is defined to be the unique G in B^* that satisfies (2.2). (For the properties of adjoints of unbounded operators see [9], Section 2.11.)

We define the *infinitesimal generator* of the adjoint semigroup S^* to be the adjoint D^* of the infinitesimal generator D of the semigroup S.

THEOREM 2.2. *Let F be an element of B^*. Then the following are equivalent:*

1. $\|T_t^* F - F\| = O(t)$ *as* $t \to 0$;
2. *F is in the domain of D^*.*

Furthermore if $\|T_t^* F - F\| = o(t)$ as $t \to 0$, then $D^* F = 0$ and $T_t^* F = F$, all $t > 0$.

PROOF. 2 implies 1. Let F be in $\mathscr{D}(D^*)$ and x in $\mathscr{D}(D)$. Then for any $t \geqq 0$,

$$\begin{aligned}\langle T_t^* F - F, x\rangle &= \langle F, T_t x - x\rangle = \left\langle F, \int_0^t T_s D x\, ds\right\rangle \\ &= \int_0^t \langle F, T_s D x\rangle\, ds = \int_0^t \langle F, D T_s x\rangle\, ds \\ &= \int_0^t \langle D^* F, T_s x\rangle\, ds = \left\langle D^* F, \int_0^t T_s x\, ds\right\rangle,\end{aligned}$$

using lemma 2.1 and standard results concerning vector valued integrals (see [9], Chapter 3). Thus

$$|\langle T_t^* F - F, x\rangle| = \left|\left\langle D^* F, \int_0^t T_s x\, ds\right\rangle\right| \leqq \|D^* F\| \left\|\int_0^t T_s x\, ds\right\| \leqq \|D^* F\| K t \|x\|,$$

which shows that

$$|\langle T_t^* F - F, x\rangle| \leqq K t \|D^* F\| \|x\| \tag{2.3}$$

for all x in $\mathscr{D}(D)$. Since $\mathscr{D}(D)$ is dense in B, (2.3) is valid for all x in B. As a consequence

$$\|T_t^* F - F\| \leqq K t \|D^* F\|, \tag{2.4}$$

and in particular $\|T_t^* F - F\| = O(t)$ as $t \to 0$. This completes the proof of 2 implies 1.

1 implies 2. If $\|T_t^* F - F\| = O(t)$, for each $t > 0$ the subset

$$S_t = \left\{\frac{1}{s}(T_s^* F - F) : 0 < s \leqq t\right\}$$

of B^* is bounded. Its closure $\bar{S}_t$ in the weak* topology is weak* compact because of the weak* compactness of closed bounded sets in B^* (see [9], p. 37). Thus, since $\bar{S}_{t_1} \subset \bar{S}_{t_2}$ if $t_1 \leqq t_2$, the set

$$\bigcap_{t>0} \bar{S}_t \tag{2.5}$$

is non-empty. Choose some point G in (2.5). We shall show that F is in $\mathscr{D}(D^*)$ and that $D^* F = G$. For any x in $\mathscr{D}(D)$,

$$\langle F, D x\rangle = \lim_{t\to 0}\left\langle F, \frac{1}{t}(T_t x - x)\right\rangle = \lim_{t\to 0}\left\langle \frac{1}{t}(T_t^* F - F), x\right\rangle = \langle G, x\rangle$$

because of the choice of G. Thus

$$\langle G, x\rangle = \langle F, D x\rangle, \quad \text{all } x \in \mathscr{D}(D),$$

which means that F is in $\mathscr{D}(D^*)$ and $D^* F = G$. This completes the proof of 1 implies 2.

If $\|T_t^* F - F\| = o(t)$, the above proof shows that $D^* F$ exists and is equal to 0; then as a consequence of (2.4), $T_t^* F = F$ for all t. This completes the proof of the theorem.

We shall now establish a result that will be used in the identification of the infinitesimal generator D^* in the concrete situations to be studied later.

A linear subspace A of B will be called *smooth* if it is dense in B, contained in $\mathscr{D}(D)$ and satisfies $T_t(A) \subset A$ for all $t \geqq 0$. If A is a smooth linear subspace of B, we shall denote by $D|A$ the restriction of D to A; i.e. the mapping having domain A and satisfying

$$(D|A)x = Dx, \quad \text{all } x \text{ in } A.$$

THEOREM 2.3. *Let A be a smooth linear subspace of B. Then $D^* = (D|A)^*$; i.e. D and $D|A$ have the same adjoints.*

PROOF. $D^*F = G$ means that

$$\langle G, x\rangle = \langle F, Dx\rangle, \quad \text{all } x \text{ in } \mathscr{D}(D), \tag{2.6}$$

and $(D|A)^*F = G$ means that

$$\langle G, x\rangle = \langle F, Dx\rangle, \quad \text{all } x \text{ in } A. \tag{2.7}$$

Thus to prove the theorem it suffices to show that (2.7) implies (2.6). So assume that (2.7) holds and take any x in A and any $t>0$. Then

$$\left\langle G, \int_0^t T_s x\, ds\right\rangle = \int_0^t \langle G, T_s x\rangle ds = \int_0^t \langle F, DT_s x\rangle ds = \int_0^t \langle F, T_s Dx\rangle ds$$

$$= \left\langle F, \int_0^t T_s Dx\, ds\right\rangle = \langle F, T_t x - x\rangle,$$

using lemma 2.1, the invariance of A under the T_s and standard operations with vector valued integrals. Thus

$$\left\langle G, \frac{1}{t}\int_0^t T_s x\, ds\right\rangle = \left\langle F, \frac{1}{t}(T_t x - x)\right\rangle \tag{2.8}$$

for all x in A. But A is dense in B, and both members of (2.8) are continuous functions of x, so (2.8) is valid for all x in B. Now choose x in $\mathscr{D}(D)$. Then the limit of (2.8) as t approaches zero is (2.6). This completes the proof of the theorem.

This result has a smple corollary that can be used in the identification of the infinitesimal generator D. The corollary will not be used in what follows but is perhaps of some independent interest. First some definitions are needed. Let U be a linear mapping

$$U : \mathscr{D}(U) \to B,$$

where $\mathscr{D}(U)$ is a linear subspace of B. The *graph* of U is the linear subspace

$$\{(x, Ux) : x \text{ in } \mathscr{D}(U)\} \tag{2.9}$$

of the product space $B \times B$. If the closure in $B \times B$ of this subspace is the graph of a linear mapping V, then V is said to be the *closure* of U ($V = \mathrm{cl}\, U$). Thus $(\mathrm{cl}\, U)x = y$ means that there is a sequence $\{x_n\}$ in $\mathscr{D}(U)$ so that $x_n \to x$ and $Ux_n \to y$. (For a discussion of graphs and closures see [10], Section 117.) The mapping U is said to be *closed* if the graph (2.9) is already closed. The infinitesimal generator D is a closed mapping (see [9], p. 318).

COROLLARY 2.4. *Let A be a smooth linear subspace. Then $D = \mathrm{cl}(D|A)$; i.e. D is the closure of its restriction to A.*

PROOF. Since D is a closed mapping, it suffices to show that the graph

$$\{(x, Dx) : x \text{ in } A\} \tag{2.10}$$

of $D|A$ is dense in the graph

$$\{(x, Dx) : x \text{ in } \mathcal{D}(D)\} \tag{2.11}$$

of D. If this were not the case there would be a continuous linear functional H of $B \times B$ that would vanish on the linear subspace (2.10) but not on the linear subspace (2.11) (see [9], p. 30). But each continuous linear functional H of $B \times B$ is of the form

$$H(x, y) = \langle G, x\rangle + \langle F, y\rangle$$

for some F and G in B^*. Thus if there were an H that vanished on (2.10) but not on (2.11) there would be F and G in B^* so that

$$\langle G, x\rangle = \langle -F, Dx\rangle, \quad \text{all } x \text{ in } A,$$

but

$$\langle G, x_0\rangle \neq \langle -F, Dx_0\rangle$$

for some x_0 in $\mathcal{D}(D)$. But this would contradict the fact that D and $D|A$ have the same adjoints.

A result analogous to Corollary 2.4 is valid for D^*. A linear subspace A of B^* will be called *weak* smooth* if it is weak* dense in B^*, contained in $\mathcal{D}(D^*)$ and satisfies $T_t^*(A) \subset A$ for all t. Let U be a linear mapping

$$U : \mathcal{D}(U) \to B^*$$

where $\mathcal{D}(U)$ is a linear subspace of B^*. Its *weak* closure*, w^* cl U, is the mapping (if it exists) whose graph is the weak* closure in $B^* \times B^*$ of the graph

$$\{(x, Ux) : x \text{ in } \mathcal{D}(U)\}. \tag{2.12}$$

U is called *weak* closed* if the graph (2.12) is already weak* closed. Any adjoint map and in particular the infinitesimal generator D^* is weak* closed.

THEOREM 2.5. *Let A be a weak* smooth linear subspace of B^*. Then $D^* = w^*$ cl $(D^*|A)$; i.e. D^* is the weak* closure of its restriction to A.*

PROOF. Since D^* is a weak* closed mapping, it suffices to show that the graph

$$\{(F, D^*F) : F \text{ in } A\} \tag{2.13}$$

of $D^*|A$ is weak* dense in the graph

$$\{(F, D^*F) : F \text{ in } \mathcal{D}(D^*)\} \tag{2.14}$$

of D^*. Thus it is enough to show that any weak* continuous linear functional h on $B^* \times B^*$ that vanishes on the linear subspace (2.13) must also vanish on the linear subspace (2.14) (see [7], p. 116). Since each weak* continuous linear functional h on B^* is $h(F) = \langle F, x\rangle$ for some x in B (see [7], p. 114), the weak* continuous linear functionals on $B^* \times B^*$ are of the form

$$h(F, G) = \langle F, x\rangle + \langle G, y\rangle \tag{2.15}$$

for some x and y in B. The h defined by (2.15) vanishes on (2.13) if and only if

$$\langle F, x\rangle = \langle D^*F, -y\rangle, \quad \text{all } F \text{ in } A, \tag{2.16}$$

and vanishes on (2.14) if and only if

$$\langle F, x\rangle = \langle D^*F, -y\rangle, \quad \text{all } F \text{ in } \mathscr{D}(D^*). \tag{2.17}$$

Thus it remains to show that (2.17) is a consequence of (2.16). But this will certainly be the case if (2.16) implies that y is in $\mathscr{D}(D)$ and $Dy = -x$, and this is what we shall establish. So assume that (2.16) holds. Then for any F in A and $t>0$,

$$\begin{aligned}\left\langle F, \int_0^t T_s(-x)\,ds\right\rangle &= \int_0^t \langle F, T_s(-x)\rangle\,ds = \int_0^t \langle T_s^*F, -x\rangle\,ds = \int_0^t D^*T_s^*F, y\rangle\,ds \\ &= \int_0^t \langle T_s^*D^*F, y\rangle\,ds = \int_0^t \langle D^*F, T_s y\rangle\,ds = \left\langle D^*F, \int_0^t T_s y\,ds\right\rangle \\ &= \left\langle F, D\left(\int_0^t T_s y\,ds\right)\right\rangle = \langle F, T_t y - y\rangle,\end{aligned}$$

using (2.16), the invariance of A under the T_s^*, standard properties of vector valued integrals and the fact (see [9], p. 307) that for each y in B, $\int_0^t T_s y\,ds$ is in $\mathscr{D}(D)$ and

$$D\left(\int_0^t T_s y\,ds\right) = T_t y - y.$$

Thus

$$\left\langle F, \int_0^t T_s(-x)\,ds\right\rangle = \langle F, T_t y - y\rangle \tag{2.18}$$

for all F in A. Since A is weak* dense in B^*, (2.18) is valid for all F in B^*, and as a consequence

$$\frac{1}{t}\int_0^t T_s(-x)\,ds = \frac{1}{t}(T_t y - y).$$

Letting t approach zero, one sees that y is in $\mathscr{D}(D)$ and $Dy = -x$. This completes the proof.

3. Identification of Lipschitz Classes

In this section we show that the semigroup results that we have established yield as simple corollaries some identifications of Lipschitz classes due to HARDY and LITTLEWOOD (see [11], p. 180).

We shall denote by U the unit circle

$$\{e^{it}: -\infty < t < +\infty\};$$

by $L_p(U)$, for $1 \leqq p < \infty$, the Banach space of all complex valued p-th power integrable functions on U with

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{it})|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}};$$

by $L_\infty(U)$ the Banach space of all complex valued essentially bounded measurable functions on U with

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f(e^{it})|;$$

by $C(U)$ the subspace of $L_\infty(U)$ consisting of continuous functions; and by $M(U)$ the Banach space of all complex valued measures on U with

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{f \in C(U) \\ \|f\| \leqq 1}} \left| \int f \, d\mu \right|.$$

Under the pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ defined by

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{it}) \, g(e^{it}) \, dt,$$

$L_q(U)$ can be identified with $L_p(U)^*$ if $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leqq p < \infty$ (if $p = 1$, $q = \infty$). Under the pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ defined by

$$\langle \mu, f \rangle = \int f \, d\mu,$$

$M(U)$ can be identified with $C(U)^*$.

If the translation semigroup

$$S = \{T_t : 0 \leqq t < \infty\}$$

is defined on $C(U)$ or $L_p(U)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, by

$$(T_t f)(e^{is}) = f(e^{i(s+t)}),$$

then the adjoint semigroup

$$S^* = \{T_t^* : 0 \leqq t < \infty\}$$

is defined on

$$L_q(U) = L_p(U)^*, \qquad 1 \leqq p < \infty,$$

by

$$(T_t^* f)(e^{is}) = f(e^{i(s-t)})$$

and on $M(U)$ by

$$(T_t^* \mu)(E) = \mu\left(\{e^{i(s+t)} : e^{is} \text{ in } E\}\right)$$

for all measurable subsets E of U.

For $1 \leqq p \leqq \infty$, $\operatorname{Lip}(1, p)$ is defined to be the subset of $L_p(U)$ consisting of all f that satisfy

$$\|T_t f - f\| = O(t) \quad \text{as} \quad t \to 0.$$

Note that for $1<q\leq\infty$, f is in $\mathrm{Lip}(1,q)$ if and only if

$$\|T_t^* f - f\| = O(t) \quad \text{as} \quad t\to 0.$$

The following two theorems are due to HARDY and LITTLEWOOD and identify the classes $\mathrm{Lip}(1,p)$ in terms of derivatives.

THEOREM 3.1. *Let f be in $L_q(U)$, $1<q\leq\infty$. Then the following are equivalent:*

1. *f is in* $\mathrm{Lip}(1,q)$;

2. *f is absolutely continuous and its derivative f' is in $L_q(U)$.*

Because of Theorem 2.2, this result is an immediate consequence of the following identification of the infinitesimal generator of S^*.

LEMMA 3.2. *If B is $L_p(U)$, $1\leq p<\infty$, so that B^* is $L_q(U)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, then the infinitesimal generator D^* of the adjoint S^* of the translation semigroup can be described as follows: $\mathscr{D}(D^*)$ consists of all absolutely continuous f in $L_q(U)$ having f' in $L_q(U)$; and for all f in $\mathscr{D}(D^*)$, $D^* f = -f'$.*

PROOF. We shall use Theorem 2.3. Choose A to be the subspace of B consisting of all continuously differentiable functions. A is clearly a smooth subspace of B and $Dh=h'$ for all h in A. By Theorem 2.3, $D^* f = g$ is equivalent to

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(e^{it})\,h(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{it})\,h'(e^{it})\,dt, \qquad \text{all } h \text{ in } A. \tag{3.1}$$

If g_1 is an indefinite integral of g, and $D^* f = g$, then an integration by parts in (3.1) yields

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g_1(e^{it})h'(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{it})\,h'(e^{it})\,dt, \qquad \text{all } h \text{ in } A. \tag{3.2}$$

In order for (3.2) to hold, $-g_1$ and f must differ by a constant; so if $D^* f = g$, then f is absolutely continuous and $g=-f'$. Conversely if f is absolutely continuous and $g=-f'$, then an integration by parts shows that (3.1) is valid, which implies that f is in $\mathscr{D}(D^*)$ and $D^* f = g$.

A similar argument applied to $B=C(U)$ and $B^*=M(U)$ yields the following:

THEOREM 3.3. *Let f be in $L_1(U)$. Then the following are equivalent:*

1. *f is in* $\mathrm{Lip}(1,1)$;

2. *There is a measure μ in $M(U)$ which is the derivative of f in the following sense:*

$$f(e^{it}) - f(1) = \int_1^{e^{it}} d\mu$$

for almost all e^{it} in U.

4. The Abel-Poisson Semigroup

In this section we identify the saturation classes for the Abel-Poisson semigroup. This is the semigroup associated with harmonic functions in the unit disk (see [9], p. 556).

If f is in $L_p(U)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, its harmonic extension to the interior of the unit disk is the function $\bar{f}$ defined by

$$\bar{f}(re^{is}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{iv})\, P_r(s-v)\, dv, \qquad 0 \leqq r < 1,$$

where

$$P_r(v) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos v + r^2}.$$

For each $t > 0$ we define the mappings

$$T_t : L_p(U) \to L_p(U) \quad \text{and} \quad T_t : C(U) \to C(U)$$

by

$$(T_t f)(e^{is}) = \bar{f}(re^{is}), \qquad r = e^{-t},$$

and define T_0 by $T_0 f = f$. Then

$$S = \{T_t : 0 \leqq t < \infty\}$$

is a semigroup that satisfies condition a, b and c of Section 2 and also satisfies condition d if $p \neq \infty$. It will be called the Abel-Poisson semigroup.

The action of the adjoint semigroup S^* on $L_q(U)$, $1 < q \leqq \infty$, is identical with that of S; i.e. $T_t^* = T_t$, all t. On $M(U)$ its action can be described as follows: For $t > 0$, $T_t^* \mu$ is the absolutely continuous measure on U that has as its density the function g given by

$$g(e^{is}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_r(s-v)\, d\mu(e^{iv}), \qquad r = e^{-t}.$$

For f in $L_p(U)$ and μ in $M(U)$, the *Fourier coefficients* $c_n(f)$ and $c_n(\mu)$ are defined for each integer n by

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{is})\, e^{-ins}\, ds,$$

$$c_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ins}\, d\mu(e^{is}).$$

The following theorem for $q \neq \infty$ is a restatement of Theorem 3.2 of [3].

THEOREM 4.1. *Let f be in $L_q(U)$, $1 < q \leqq \infty$. Then the following are equivalent for the Abel-Poisson semigroup:*

1. $\|T_t f - f\| = O(t)$ *as* $t \to 0$;

2. *There is a g in $L_q(U)$ so that $c_n(g) = |n|\, c_n(f)$, all n.*

Furthermore if $\|T_t f - f\| = o(t)$, then f must be constant.

Because of Theorem 2.2, this result is an immediate consequence of the fact that $T_t = T_t^*$ on $L_p(U)$ and the following identification of the infinitesimal generator of S^*.

LEMMA 4.2. *If B is $L_p(U)$, $1 \leqq p < \infty$, so that B^* is $L_q(U)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, then the infinitesimal generator D^* of the adjoint S^* of the Abel-Poisson semigroup can be described as follows: $\mathcal{D}(D^*)$ consists of all f in $L_q(U)$ for which there is a g in $L_q(U)$ with*

$$c_n(g) = -|n|\, c_n(f), \qquad \text{all } n; \tag{4.1}$$

and $D^* f$ is the unique g that satisfies (4.1).

PROOF. We shall use Theorem 2.3. Choose A to be the subspace of B consisting of all trigonometric polynomials. If f is in B, it is easy to show that

$$c_n(T_t f) = e^{-|n|t} c_n(f), \qquad \text{all } n, \tag{4.2}$$

so $T_t(A) \subset A$, all t. If f is the trigonometric polynomial defined by

$$f(e^{is}) = \sum_{-N}^{+N} a_n e^{ins},$$

because of (4.2)

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (T_t f - f)$$

exists uniformly on U and is the trigonometric polynomial g defined by

$$g(e^{is}) = -\sum_{-N}^{+N} |n|\, a_n e^{ins}.$$

Thus A is contained in $\mathcal{D}(D)$ and

$$c_n(Dh) = -|n|\, c_n(h), \quad \text{all } n, \quad \text{all } h \text{ in } A. \tag{4.3}$$

Since A is dense in B, it is a smooth linear subspace of B. The lemma now follows from (4.3), Theorem 2.3 and the definitions of the Fourier coefficients and the pairing between $L_p(U)$ and $L_q(U)$.

An immediate corollary of the case $q = \infty$ of Theorem 4.1 and Section 4.36 of [11] is the following.

COROLLARY 4.3. *Let f be a function continuous in the unit disk $\{z : |z| \leqq 1\}$ and analytic at interior points. Then the following are equivalent.*

1. $\sup_t |f(re^{it}) - f(e^{it})| = O\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)$
2. $\sup_{|z|<1} |f'(z)| < \infty$.

Furthermore if

$$\sup_t |f(re^{it}) - f(e^{it})| = o\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

then f is constant.

An argument similar to that of Theorem 4.1 and Lemma 4.2 applied to $B = C(U)$ and $B^* = M(U)$ yields the following:

THEOREM 4.4[2]). *Let f be in $L_1(U)$. Then the following are equivalent for the Abel-Poisson semigroup:*

1. $\|T_t f - f\| = O(t)$ as $t \to 0$;
2. *There is a μ in $M(U)$ so that $c_n(\mu) = |n|\, c_n(f)$, all n.*

Furthermore if $\|T_t f - f\| = o(t)$, then f is a constant.

5. The Gauss-Weierstrass Semigroup

In this section we identify the saturation classes for the Gauss-Weierstrass semigroup. This is the semigroup associated with solutions of the heat equation in the half-plane (see [9], p. 578).

We shall denote by R the real line; by $L_p(R)$, for $1 \leqq p < \infty$, the Banach space of all complex valued p-th power integrable functions on R with

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p};$$

by $L_\infty(R)$ the Banach space of all complex valued essentially bounded measurable functions on R with

$$\|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{-\infty < t < +\infty} |f(t)|;$$

by $C_0(R)$ the subspace of $L_\infty(R)$ consisting of all continuous functions that satisfy

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to -\infty} f(t) = 0;$$

and by $M(R)$ the space of all complex valued finite measures μ on R with

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{f \in C_0(R) \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int f \, d\mu \right|.$$

Under the pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ defined by

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t)\, dt,$$

$L_q(R)$ can be identified with $L_p(R)^*$ if $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leqq p < \infty$ (if $p = 1$, $q = \infty$). Under the pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ defined by

$$\langle \mu, f \rangle = \int f \, d\mu,$$

$M(R)$ can be identified with $C_0(R)^*$.

For each $t > 0$ we define the mappings

$$T_t : L_p(R) \to L_p(R) \quad \text{and} \quad T_t : C_0(R) \to C_0(R)$$

by

$$(T_t f)(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, e^{-(u-v)^2/t} \, dv$$

---

[2]) For proof of this result, using the methods of classical analysis, one may consult: H. BUCHWALTER: Saturation de certains procédés de sommation. C. R. Acad. Sci., Paris **248**, 909–912 (1959).

and define T_0 by $T_0 f = f$. Then

$$S = \{T_t : 0 \leqq t < \infty\}$$

is a semigroup that satisfies conditions *a*, *b* and *c* of Section 2 and also satisfies condition *d* if $p \neq \infty$. It will be called the Gauss-Weierstrass semigroup.

The action of the adjoint semigroup S^* on $L_q(R)$, $1 < q \leqq \infty$, is identical with that of S; i.e. $T_t^* = T_t$, all t. On $M(R)$ its action can be described as follows: For $t > 0$, $T_t^* \mu$ is the absolutely continuous measure on R that has as its density the function g given by

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-v)^2/t} \, d\mu(v).$$

The following for $q \neq \infty$ is Theorem 5.4 of [3].

THEOREM 5.1. *Let f be in $L_q(R)$, $1 < q \leqq \infty$. Then the following are equivalent for the Gauss-Weierstrass semigroup:*

1. $\|T_t f - f\| = O(t)$ *as* $t \to 0$;

2. *f and f' are absolutely continuous and f'' is in $L_q(R)$.*

Furthermore if $\|T_t f - f\| = o(t)$, then f is constant and must be zero if $q \neq \infty$.

Because of Theorem 2.2, this result is an immediate consequence of the fact that $T_t = T_t^*$ on $L_q(R)$ and the following identification of the infinitesimal generator of S^*.

LEMMA 5.2. *If B is $L_p(R)$, $1 \leqq p < \infty$, so that B^* is $L_q(R)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, then the infinitesimal generator D^* of the adjoint S^* of the Gauss-Weierstrass semigroup can be described as follows: $\mathcal{D}(D^*)$ consists of all absolutely continuous f in $L_q(R)$ having f' absolutely continuous and f'' in $L_q(R)$; and for all f in $\mathcal{D}(D^*)$, $D^* f = \frac{1}{2} f''$.*

PROOF. We shall use Theorem 2.3. Choose A to be the subspace of B consisting of all infinitely differentiable functions h that satisfy

$$|h^{(n)}(u)| = O(|u^{-m}|) \quad \text{as} \quad |u| \to \infty, \quad \text{all } n, m \geqq 0.$$

It is easy to check that A is a smooth subspace of B and that $Dh = \frac{1}{2} h''$ for h in A. Thus by Theorem 2.3, $D^* f = g$ is equivalent to

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \, h(u) \, du = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \, h''(u) \, du, \quad \text{all } h \text{ in } A.$$

The remainder of the proof follows by integration by parts as in the proof of Lemma 3.2.

A similar argument applied to $B = C_0(R)$ and $B^* = M(R)$ yields the following:

THEOREM 5.3. *Let f be in $L_1(R)$. Then the following are equivalent for the Gauss-Weierstrass semigroup:*

1. $\|T_t f - f\| = O(t)$ *as* $t \to 0$.

2. *There is a measure μ in $M(R)$ which is the second derivative of f in the following sense: If the functions h_1 and h_2 are defined by $h_1(u)=\int_0^u d\mu(v)$, $h_2(u)=\int_0^u h_1(v)\,dv$, then f and h_2 differ by a linear function.*

Furthermore if $\|T_t f - f\| = o(t)$, then f is zero.

6. The Poisson-Cauchy Semigroup

In this section we identify saturation classes for the Poisson-Cauchy semigroup. This is the semigroup associated with harmonic functions in the half-plane (see [9], p. 579). The saturation classes identified are those for $L_p(R)$, $p=1$ and $p=\infty$. Those for $1<p<\infty$ are described in Theorem 5.2 of [3].

For each $t>0$ we define the mappings

$$T_t: L_p(R)\to L_p(R) \quad \text{and} \quad T_t: C_0(R)\to C_0(R)$$

by

$$(T_t f)(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,\frac{t}{t^2+(u-v)^2}\,dv$$

and define T_0 by $T_0 f = f$. Then

$$S=\{T_t: 0\leqq t<\infty\}$$

is a semigroup that satisfies conditions *a*, *b* and *c* of Section 2 and also satisfies condition *d* if $p\neq\infty$. It will be called the Poisson-Cauchy semigroup.

The action of the adjoint semigroup S^* on $L_\infty(R)$ is identical with that of S; i.e. $T_t^*=T_t$, all t. On $M(R)$ its action can be described as follows: For $t>0$, $T_t^*\mu$ is the absolutely continuous measure on B that has its density the function g given by

$$g(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+(u-v)^2}\,d\mu(v).$$

Thus if μ is an absolutely continuous measure having density f, the function f will be in $L_1(R)$ and $T_t^*\mu$ will be absolutely continuous measure having density $T_t f$.

For f in $L_1(R)$ and μ in $M(R)$, the *Fourier transforms* $\hat{f}$ and $\hat{\mu}$ are defined by

$$\hat{f}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,e^{-isv}\,dv, \qquad -\infty<s<+\infty,$$

$$\hat{\mu}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isv}\,d\mu(v), \qquad -\infty<s<+\infty.$$

An application of the Fubini theorem shows that for any f in $L_1(R)$ and μ in $M(R)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\hat{\mu}(s)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(v)\,d\mu(v). \tag{6.1}$$

THEOREM 6.1. *Let f be in $L_1(R)$. Then the following are equivalent for the Poisson-Cauchy semigroup:*

1. $\|T_t f - f\| = O(t)$ *as* $t \to 0$;
2. *There is a μ in $M(R)$ so that $\hat{\mu}(s) = |s|\,\hat{f}(s)$ for all s.*

Furthermore if $\|T_t f - f\| = o(t)$, then f is zero.

Because of the canonical identification of $L_1(R)$ with the subspace of $M(R)$ consisting of the absolutely continuous measures, and Theorem 2.2, this result is an immediate consequence of the following identification of the infinitesimal generator of S^* on $M(R)$.

LEMMA 6.2. *If B is $C_0(R)$ so that B^* is $M(R)$, then the infinitesimal generator D^* of the adjoint S^* of the Cauchy-Poisson semigroup can be described as follows: $\mathscr{D}(D^*)$ consists of all η in $M(R)$ for which there is a μ in $M(R)$ with*

$$\hat{\mu}(s) = -|s|\,\hat{\eta}(s), \qquad -\infty < s < +\infty, \tag{6.2}$$

and $D^*\eta$ is the unique μ satisfying (6.2).

PROOF. We shall use Theorem 2.3. Choose A to be the subspace of $C_0(R)$ consisting of all h for $\hat{h}$ in $L_2(R)$ and vanishing outside of a finite interval. It is easy to check that A is a smooth subspace of $C_0(R)$ and that

$$D\hat{h} = \widehat{mh}, \qquad \text{all } \hat{h} \text{ in } A, \tag{6.3}$$

where m is the function defined by

$$m(s) = -|s|, \qquad -\infty < s < +\infty. \tag{6.4}$$

By Theorem 2.3, $D^*\eta = \mu$ is equivalent to

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(v)\,d\mu(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} (D\hat{h})(v)\,d\eta(v), \qquad \text{all } \hat{h} \text{ in } A,$$

which by (6.3) is equivalent to

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(v)\,d\mu(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{mh}(v)\,d\eta(v), \qquad \text{all } \hat{h} \text{ in } A.$$

But this by (6.1) and (6.4) is equivalent to

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\hat{\mu}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-|s|\,h(s)\hat{\eta}(s)\right) ds$$

for all h in $L_2(R)$ vanishing outside of a finite interval. It is clear that this can happen if and only if $\hat{\mu}(s) = -|s|\,\hat{\eta}(s)$ for all s.

It does not seem possible to get an explicit description of the action of the infinitesimal generator D^* on $L_\infty(R)$. Thus the best that we can do for $L_\infty(R)$ is the following:

THEOREM 6.3. *Let f be in $L_\infty(R)$. Then the following are equivalent for the Poisson-Cauchy semigroup:*

1. $\|T_t f - f\| = O(t)$ *as* $t \to 0$.

2. f *is in* $\mathscr{G}(D^*)$.

Furthermore if $\|T_t f - f\| = o(t)$, *then* f *is constant.*

PROOF. Because of Theorem 2.2, all that need be proved is that $T_t f = f$, all t, implies that f is constant. For each f in $L_\infty(R)$ the function $\bar{f}$ defined in the half-plane

$$\{(\mu, t) : -\infty < \mu < +\infty, 0 < t < +\infty\}$$

by $\bar{f}(\mu, t) = (T_t f)(\mu)$ is harmonic. Then if $T_t f = f$, all t, $\bar{f}$ is constant on vertical lines and thus must be constant.

It is possible to get some information about the action of D^* on $L_\infty(R)$ by using Theorem 2.5. The subspace A of $L_\infty(R)$ defined in the proof of Lemma 6.2 is a weak* smooth subspace of $L_\infty(R)$ in the sense of Section 2, and thus by Theorem 2.5, D^* is the weak* closure of its restriction to A. But the action of D^* on A is identical with the action of D on A described in the proof of Lemma 6.2. Thus a function f in $L_\infty(R)$ is in the domainof D^* if and only if there are nets $\{f_\alpha\}$ and $\{g_\alpha\}$ in A with $f_\alpha \to f$, $g_\alpha \to g$ weak* and $\hat{g}_\alpha(s) = -|s| \hat{f}_\alpha(s)$ for all α and s. But this is not very concrete.

References

[1] BUTZER, P. L.: Halbgruppen von linearen Operatoren und eine Anwendung in der Approximationstheorie. J. reine u. angew. Math. **197**, 112–120 (1957). — [2] BUTZER, P. L.: Sur la théorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines intégrales singulières. C. R. Acad. Sci., Paris **253**, 1473–1475 (1956). — [3] BUTZER, P. L.: Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. Math. Ann. **133**, 410–425 (1957). — [4] BUTZER, P. L.: Halbgruppen von linearen Operatoren und das Darstellungs- und Umkehrproblem für Laplace-Transformationen. Math. Ann. **134**, 154–166 (1957). — [5] BUTZER, P. L.: Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren. Math. Z. **70**, 93–112 (1958). — [6] BUTZER, P. L.: Representation and approximation of functions by general singular integrals. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A (in print). — [7] DIEUDONNÉ, J.: La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. École norm. **59**, 107–139 (1942). — [8] FAVARD, J.: Sur l'approximation dans les espaces vectoriels. Annali di Mathematica **29**, 259–291 (1949). — [9] HILLE, E., and R. PHILLIPS: Functional analysis and semigroups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **31** (1957) rev. ed. — [10] RIESZ, F., and B. SZ.-NAGY: Functional Analysis. New York 1955. — [11] ZYGMUND, A.: Trigonometrical Series, Warszawa 1935. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press 1959.

Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 18. Juni 1959)

LEPTIN, H.
Math. Zeitschr. 73, 235–253 (1960)

Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen

Von
HORST LEPTIN

§ 0. Bezeichnungen, Definitionen und Ergebnisse

Wir betrachten in dieser Arbeit additiv geschriebene abelsche Gruppen, die wir stets mit großen lateinischen Buchstaben $G, H, \ldots$ bezeichnen wollen. *Von allen diesen abelschen Gruppen setzen wir voraus, daß man in ihnen stets eindeutig durch 2 dividieren kann.* Mit $Z(n)$ bezeichnen wir stets die zyklische Gruppe der Ordnung n, mit $Z(p^\infty)$ die zur Primzahl p gehörige Prüfersche unendliche quasizyklische Gruppe. Für p-Gruppen $G, H, \ldots$ bezeichnen wir die Untergruppen aller von p^t annullierten Elemente mit ${}^{(t)}G, {}^{(t)}H, \ldots$.

Ferner betrachten wir die Automorphismengruppen der Gruppen $G, H, \ldots$, für die wir die Bezeichnung $\Gamma(G), \Gamma(H), \ldots$ wählen, wobei wir gelegentlich auf die Argumente $G, H, \ldots$ verzichten werden. Für eine Teilmenge $\mathsf{E} < \Gamma$ sei (E) die von E erzeugte Untergruppe in Γ, $\mathfrak{z}\mathsf{E}$ das Zentrum von (E) und $\mathfrak{c}\mathsf{E}$ der Zentralisator von (E) in Γ. Ist in G die Multiplikation mit der rationalen Zahl r möglich, so bezeichnen wir den dadurch definierten Endomorphismus ebenfalls mit r, insbesondere sei 1 stets der identische Automorphismus. Eine *Involution* von G ist ein Automorphismus der Ordnung 2 aus $\Gamma(G)$, z.B. ist -1 stets eine Involution aus $\mathfrak{z}\Gamma$ (denn G hat keine Elemente der Ordnung 2!).

Da wir in G eindeutig durch 2 dividieren können, entsprechen die Involutionen $\varepsilon \in \Gamma(G)$ bekanntlich umkehrbar eindeutig den direkten Zerlegungen von G; setzen wir

$$G_\varepsilon^\pm = \{x \in G;\ \varepsilon x = \pm x\},$$

so ist $G = G_\varepsilon^+ \oplus G_\varepsilon^-$, wobei „$\oplus$" das Zeichen für die direkte Summe ist. $G_\varepsilon^\pm$ besteht genau aus den Elementen $\frac{1}{2}(\varepsilon \pm 1)x$, $x \in G$.

Ein System Θ vertauschbarer Involutionen erzeugt eine Untergruppe $\Theta < \Gamma$ vom Exponenten 2, deren Rang $r(\Theta)$ über dem Galoisfeld $GF(2)$ wir den *Rang* von Θ nennen. Für eine Teilmenge $\mathsf{E} < \Gamma$ definieren wir den *Index* von E, in Zeichen $i(\mathsf{E})$, als den Rang des Systems aller Involutionen aus $\mathfrak{z}\mathfrak{c}\mathsf{E}$, d.h. aller Involutionen aus dem Zentrum des Zentralisators von E. *Wir bemerken, daß die Begriffe Rang und Index rein gruppentheoretisch in Γ definiert sind*, d.h. sie sind unabhängig von der Darstellung von $\Gamma = \Gamma(G)$ als Automorphismengruppe von G. Hat man also z.B. zwei abelsche Gruppen G und G' und einen Isomorphismus Φ von $\Gamma(G)$ auf $\Gamma(G')$, so ist mit $\Theta < \Gamma(G)$ auch $\Theta' = \Phi(\Theta) < \Gamma(G')$ ein System vertauschbarer Involutionen und es ist $r(\Theta) = r(\Theta')$; ferner gilt $i(\mathsf{E}) = i\left(\Phi(\mathsf{E})\right)$ für jede Teilmenge $\mathsf{E} < \Gamma(G)$. Setzen wir

$$i(G) = i\left(\Gamma(G)\right),$$

so gilt trivialerweise

(0.1) *Es existiert dann und nur dann eine direkte Zerlegung von G in von Null verschiedene charakteristische Untergruppen, wenn $i(G)>1$ ist.*

Denn $i(G)>1$ bedeutet Existenz zentraler Involutionen $\zeta \neq -1$ in $\Gamma(G)$. Aber ζ liegt genau dann im Zentrum von Γ, wenn G_ζ^+ und G_ζ^- charakteristisch sind.

Wir betrachten nun eine direkte Zerlegung von G in n von Null verschiedene Summanden:

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n. \tag{0}$$

Ist ε_i diejenige Involution, die auf H_i gleich -1 und auf H_k, $k \neq i$, gleich 1 ist, so nennen wir das System $\mathsf{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ dieser n miteinander vertauschbaren Involutionen *das zur Zerlegung* (0) *gehörige System*. Die Involutionen ε aus (E) können wir durch *Vorzeichenvektoren* beschreiben: Wir setzen $\varepsilon = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, wobei $v_i = +$ ist, falls ε auf H_i gleich $+1$ ist und $v_i = -$, falls ε gleich -1 auf H_i. Zum Beispiel ist $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = (- + - + + +)$ für $n = 6$.

Zu der Zerlegung (0) gehört ferner eine Darstellung der Automorphismen $\alpha \in \Gamma(G)$ durch quadratische n-reihige Matrizen; allgemeiner läßt sich ein Endomorphismus σ von G durch eine Matrix

$$\sigma = (\sigma_{ik}) \quad \text{mit} \quad \sigma_{ik} = \pi_i \sigma \pi_k \in \mathrm{Hom}(H_k, H_i)$$

beschreiben. Hierbei ist π_i die Projektion von G auf den direkten Summanden H_i. Mit diesen Matrizen kann man natürlich wie üblich rechnen, da man eine bilineare kanonische Abbildung von $\mathrm{Hom}(H_k, H_i) \times \mathrm{Hom}(H_i, H_l)$ in $\mathrm{Hom}(H_k, H_l)$ hat. Mit Hilfe dieser Matrizen können wir die Elemente aus $\mathfrak{c}\mathsf{E}$ leicht kennzeichnen:

(0.2) *Ist E das zur Zerlegung* (0) *gehörige System, so besteht $\mathfrak{c}\mathsf{E}$ aus allen Automorphismen $\alpha = (\alpha_{ik}) \in \Gamma(G)$ mit $\alpha_{ik} = 0$ für $i \neq k$.*

Die Gleichung $\alpha \varepsilon_i = \varepsilon_i \alpha$ für $\varepsilon_i \in \mathsf{E}$ bedeutet $\alpha_{ij} = -\alpha_{ij}$ und $\alpha_{ki} = -\alpha_{ki}$, d.h. $\alpha_{ij} = \alpha_{ki} = 0$ für $j, k \neq i$. Da das für alle $i \leqq n$ gelten muß, falls $\alpha \in \mathfrak{c}\mathsf{E}$ ist, folgt hieraus die Behauptung.

Die Hauptergebnisse der Arbeit lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Sei G eine abelsche p-Gruppe, G' eine abelsche q-Gruppe und $3 \leqq p \leqq q$. Sind die Automorphismengruppen $\Gamma(G)$ und $\Gamma(G')$ isomorph, so gilt:

I. 1) *Ist $p = q \geqq 3$, so haben G und G' isomorphe Basisuntergruppen*[1]).

2) *Ist $p = q \geqq 5$, so sind G und G' isomorph.*

II. *Ist $3 \leqq p < q$, so ist $G \cong Z(p^e)$, $G' \cong Z(q)$ und $(p-1)p^{e-1} = q - 1$.*

Ob auch im Falle $p = q = 3$ die Gruppen G und G' isomorph sind, ist mir nicht bekannt.

[1]) Dieses Resultat gilt auch, wenn wir die maximalen Divisionsuntergruppen mit in die Basisuntergruppen aufnehmen, d.h. wenn wir, etwas anders als sonst, die Basisuntergruppen als maximale reine, einrangig direkt zerlegbare Untergruppen definieren.

Alle in dieser Arbeit sonst noch benutzten Definitionen und Ergebnisse findet man z.B. in dem Buch über abelsche Gruppen von L. FUCHS (Abelian Groups, Budapest 1958).

§ 1. Involutionen

Wir wollen untersuchen, wann ein System A vertauschbarer Involutionen aus $\Gamma(G)$ zu einer Zerlegung (0) gehört, so, wie es in § 0 beschrieben wurde. Zunächst zeigen wir durch Induktion nach der Anzahl l der Involutionen aus A, daß es überhaupt Zerlegungen (0) mit zugehörigem System E von Involutionen gibt, derart, daß $\mathsf{A} < (\mathsf{E})$ ist. Wir nennen solche Zerlegungen *für* A *zulässig*. Sicher existieren zulässige Zerlegungen für $l = 1$. Nun sei ε eine feste Involution aus A und A' das System der $l-1$ von ε verschiedenen Involutionen aus A. Wegen der Vertauschbarkeit der Involutionen aus A sind G_ε^+ und G_ε^- invariant bezüglich A' und nach Induktionsvoraussetzung folglich für A' zulässig direkt zerlegbar, d.h. die $\eta \in \mathsf{A}'$ sind auf den direkten Summanden gleich ± 1. Hieraus erhält man dann eine zulässige Zerlegung (0) von G für A. Wir wollen nun die Anzahl n der Summanden in (0) minimal wählen. In diesem Falle ist A *trennend*, das soll bedeuten: Zu zwei verschiedenen Summanden der Summe (0) existiert ein $\varepsilon \in \mathsf{A}$, das auf dem einen $+1$ und auf dem anderen -1 ist. Wir sagen auch, daß dann A *die Summanden* H_i, bzw. *die Zerlegung* (0) *trennt*. Würde nun A die Summanden H_i nicht trennen, so würden alle $\varepsilon \in \mathsf{A}$ etwa auf $H = H_1 \oplus H_2$ gleich ± 1 sein und man erhielte in $G = H \oplus H_3 \oplus \cdots \oplus H_n$ eine zulässige Zerlegung für A mit $n-1$ Summanden. Umgekehrt ist klar, daß eine zulässige Zerlegung nicht verkürzbar ist, falls A sie trennt. Wir wollen nun zeigen:

(1.1) *Sei* A *ein endliches System vertauschbarer Involutionen aus* $\Gamma(G)$. *Es existiert genau eine für* A *zulässige Zerlegung* (0) *von* G *kleinster Länge, d.h. mit minimalem* n, *und diese ist dadurch gekennzeichnet, daß* A *sie trennt.*

Wir hatten schon gesehen, daß A dann und nur dann trennt, wenn die zugehörige Zerlegung kleinste Länge hat, es genügt also zu zeigen, daß die Summanden einer zulässigen kürzesten Zerlegung sich nur durch A ausdrücken lassen. Trennt nun A die Zerlegung (0) und ist H_i ein Summand dieser Zerlegung, so sei $\mathsf{A}_i^\pm$ die Menge aller $\eta \in \mathsf{A}$, die auf H_i gleich ± 1 sind; es ist dann $\mathsf{A}_i^+ \cup \mathsf{A}_i^- = \mathsf{A}$ und $\mathsf{A}_i^+ \cap \mathsf{A}_i^- = \emptyset$. Man sieht sofort, daß H_i gerade aus allen $x \in G$ mit $\eta x = \pm x$ für $\eta \in \mathsf{A}_i^\pm$ besteht. Man erhält so n disjunkte Zerlegungen $\mathsf{A} = \mathsf{A}_i^+ \cup \mathsf{A}_i^-$, die gerade den direkten Summanden H_i entsprechen. Für jede andere von diesen n Zerlegungen verschiedene disjunkte Zerlegung $\mathsf{A} = \mathsf{A}^+ \cup \mathsf{A}^-$ ist 0 die einzige Lösung von $\eta x = \pm x$ für alle $\eta \in \mathsf{A}^\pm$: Sei nämlich $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in H_i$ eine Lösung dieser Gleichungen und etwa $x_1 \neq 0$. Aus $\eta x = x$ für $\eta \in \mathsf{A}^+$ folgt $\eta x_1 = x_1$, folglich ist η gleich 1 auf H_1, d.h. $\eta \in \mathsf{A}_1^+$, also $\mathsf{A}^+ < \mathsf{A}_1^+$, genau so $\mathsf{A}^- < \mathsf{A}_1^-$, also $\mathsf{A}^+ = \mathsf{A}_1^+$, $\mathsf{A}^- = \mathsf{A}_1^-$. Die direkten Summanden einer kürzesten zulässigen Zerlegung lassen sich also ausdrücken durch die Zerlegungen von A in zwei disjunkte Teilmengen und sind folglich durch A eindeutig bestimmt. Damit ist (1.1) bewiesen.

Wir nennen die durch (1.1) eindeutig definierte Zerlegung von G *die zu* $\mathfrak{A}$ *gehörige Zerlegung von* G und bezeichnen das zugehörige System $\mathfrak{E}$ mit $\tilde{\mathfrak{A}}$. Aus der im vorigen Absatz gegebenen Kennzeichnung der direkten Summanden H_i der zu $\mathfrak{A}$ gehörigen direkten Zerlegung von G folgt, daß diese H_i invariant sind bei allen mit den $\eta \in \mathfrak{A}$ vertauschbaren Automorphismen aus Γ, d.h. $\alpha H_i = H_i$ für $\alpha \in \mathfrak{c}\mathfrak{A}$, also $\alpha \in \mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{A}}$ und folglich $\mathfrak{c}\mathfrak{A} < \mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{A}}$. Da wegen $\mathfrak{A} < (\tilde{\mathfrak{A}})$ auch $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{A}} < \mathfrak{c}\mathfrak{A}$ gilt, ist gezeigt:

(1.2) $$\mathfrak{c}\mathfrak{A} = \mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{A}} \quad \textit{und a fortiori} \quad i(\mathfrak{A}) = i(\tilde{\mathfrak{A}}).$$

Aus (1.2) folgt leicht:

(1.3) *Ist* (0) *die zu* $\mathfrak{A}$ *gehörige Zerlegung von* G, *so ist*

$$i(\mathfrak{A}) = \sum_{j=1}^{n} i(H_j).$$

Insbesondere ist $i(\mathfrak{A}) = n$, *falls folgende Bedingung für* G *erfüllt ist:*

(Δ) *Kein direkter Summand von* G *ist nicht-triviale direkte Summe charakteristischer Untergruppen.*

Beweis. Wegen (1.2) genügt es, $i(\tilde{\mathfrak{A}})$ zu bestimmen. Nun folgt aus (0.2):

$$\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{A}} \cong \Gamma(H_1) \times \cdots \times \Gamma(H_n)$$

und folglich

$$\mathfrak{z}\mathfrak{c}\mathfrak{A} \cong \mathfrak{z}\Gamma(H_1) \times \cdots \times \mathfrak{z}\Gamma(H_n).$$

Hieraus folgt die erste Gleichung von (1.3). Ist die Bedingung (Δ) erfüllt, so folgt aus (0.2), daß alle $i(H_j) = 1$ sind. Damit ist auch die zweite Behauptung von (1.3) bewiesen.

Wir wollen nun untersuchen, wann ein System vertauschbarer Involutionen das zu einer Zerlegung (0) gehörige System ist. Hierzu ist es jedoch erforderlich, für G die Bedingung (Δ) vorauszusetzen. Für den uns hauptsächlich interessierenden Fall periodischer Gruppen bedeutet das, daß wir uns auf die Betrachtung primärer Gruppen beschränken. *Von nun an sei stets vorausgesetzt, daß die betrachteten abelschen Gruppen die Bedingung* (Δ) *erfüllen.*

Sei $\mathfrak{A}$ ein endliches System vertauschbarer Involutionen aus $\Gamma(G)$. Um Satz 1 bequem formulieren zu können, definieren wir: Ein System $\mathfrak{A}'$ vertauschbarer Involutionen heißt *abgeleitetes System von* $\mathfrak{A}$, wenn eine Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in paarweise fremde Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l$ existiert derart, daß $\mathfrak{A}'$ gerade aus den Involutionen $\eta_i = \prod_{\varepsilon \in \mathfrak{A}_i} \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, l$, besteht. Ist $\mathfrak{A}'$ abgeleitetes System von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$ abgeleitetes System von $\mathfrak{A}'$, so ist $\mathfrak{A}''$ auch abgeleitetes System von $\mathfrak{A}$.

Satz 1. *Sei* $\mathfrak{A}$ *ein endliches System vertauschbarer Involutionen aus* $\Gamma(G)$, (0) *die zu* $\mathfrak{A}$ *gehörige direkte Zerlegung von* G *und* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *das zu* (0) *gehörige System. Damit man* $\mathfrak{A}$ *aus* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *durch Ersetzen einer geraden Anzahl der* $\varepsilon \in \tilde{\mathfrak{A}}$ *durch* $-\varepsilon$

erhalten kann, ist notwendig und hinreichend, daß für alle abgeleiteten Systeme $\mathfrak{A}'$ *von* $\mathfrak{A}$ *die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1) $\prod_{\eta \in \mathfrak{A}'} \eta = -1$,

2) $1 \notin \mathfrak{A}'$,

3) $i(\mathfrak{A}') = r(\mathfrak{A}')$.

Die Bedeutung von Satz 1 liegt darin, daß die zu Zerlegungen (0) gehörigen Systeme $\mathfrak{E}$ hierin im wesentlichen, d.h. bis auf eine gerade Anzahl von Vorzeichen der $\varepsilon_i \in \mathfrak{E}$, invariant, d.h. nur durch gruppentheoretische Eigenschaften von $\Gamma(G)$ gekennzeichnet werden.

Beweis von Satz 1. Gelten die Bedingungen 1) bis 3) aus Satz 1 für das System $\mathfrak{A}$, so auch für jedes abgeleitete System von $\mathfrak{A}$, ferner für jedes System $\mathfrak{B}$, das man aus $\mathfrak{A}$ durch Änderung einer geraden Anzahl von Vorzeichen erhalten kann. Das ist für 1) trivial und für 3) fast trivial, weil wegen 1) $(\mathfrak{A}) = (\mathfrak{B})$ ist. Auch 2) ist leicht zu sehen: Wäre $\mathfrak{B}'$ ein abgeleitetes System von $\mathfrak{B}$ und $1 \in \mathfrak{B}'$, so hätten wir offenbar $-1 \in \mathfrak{A}'$, wobei $\mathfrak{A}'$ das $\mathfrak{B}'$ entsprechende abgeleitete System von $\mathfrak{A}$ ist. Enthielte $\mathfrak{A}'$ noch von -1 verschiedene Involutionen, so müßte deren Produkt wegen 1) gleich 1 sein, im Widerspruch zu 2). Folglich ist $\mathfrak{A}' = \{-1\}$. Das ist aber nicht möglich, da $\mathfrak{B}'$ aus $\mathfrak{A}'$ hervorgeht durch Änderung einer geraden Anzahl von Vorzeichen. Folglich ist auch 2) für $\mathfrak{B}$ erfüllt.

Für das zu (0) gehörige System $\mathfrak{E}$ sind 1) und 2) erfüllt und $i(\mathfrak{E}) = n = r(\mathfrak{E})$ nach (1.3). Da die abgeleiteten Systeme $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{E}$ wieder zu direkten Zerlegungen von G gehören, gilt also auch $i(\mathfrak{E}') = r(\mathfrak{E}')$ für die abgeleiteten Systeme, d.h. für $\mathfrak{E}$ sind die Bedingungen 1) bis 3) erfüllt, diese sind also jedenfalls notwendig.

Nun seien für das System $\mathfrak{A}$ die Bedingungen 1) bis 3) in Satz 1 erfüllt und (0) die zu $\mathfrak{A}$ gehörige Zerlegung von G. Wie im vorletzten Absatz sieht man, daß $-1 \in \mathfrak{A}$ nur für $\mathfrak{A} = \{-1\}$ möglich ist. Daraus folgt zunächst die Richtigkeit der Behauptung für $n = 1$. Ist $n > 1$ und existiert eine Involution $\varepsilon \in \mathfrak{A}$, für die auch $-\varepsilon$ in $\mathfrak{A}$ liegt, so folgt ferner, daß das durch Multiplikation von ε und $-\varepsilon$ erhaltene abgeleitete System von $\mathfrak{A}$ die Involution -1 und folglich nur -1 enthält. Das geht nur für $\mathfrak{A} = \{\varepsilon, -\varepsilon,\}$ d.h. im Falle $n = 2$. Hier stimmt die Behauptung also auch. Falls $n > 2$ ist, kann also $\mathfrak{A}$ weder -1 enthalten noch mit einer Involution ε zugleich auch $-\varepsilon$. Für $n = 3$ kann $\mathfrak{A}$ dann nur aus den $\pm \varepsilon_i$ bestehen, $\varepsilon_i \in \mathfrak{E}$, wobei wegen 1) das Vorzeichen $-$ kein oder zweimal auftritt.

Nun sei $n \geqq 4$. Wegen 3) enthält $\mathfrak{A}$ dann mindestens 4 Involutionen. Wir wollen zeigen, daß die $\varepsilon \in \mathfrak{A}$ bis auf das Vorzeichen mit den $\varepsilon_i \in \tilde{\mathfrak{A}}$ übereinstimmen. Da $\mathfrak{A}$ die Zerlegung (0) trennt, müssen dann (bis auf das Vorzeichen) alle ε_i in $\mathfrak{A}$ liegen und wegen 1) ist die Anzahl der $-\varepsilon_i \in \mathfrak{A}$ gerade. Unsere Behauptung läuft also darauf hinaus zu zeigen, daß kein Vorzeichenvektor eines ε aus $\mathfrak{A}$ mindestens zwei $+$ und zwei $-$ enthält. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß etwa die Involution $\eta_1 = (++--\cdots)$

in $\mathfrak{A}$ liegt. Da $\mathfrak{A}$ trennt, gibt es weitere Involutionen η_2 und η_3 in $\mathfrak{A}$, die H_1 und H_2, sowie H_3 und H_4 trennen. Da $\mathfrak{A}$ noch weitere, von den η_i, $i \leqq 3$, verschiedene Involutionen enthält, können wir noch über die Vorzeichen von η_2 und η_3 frei verfügen. Wählen wir außerdem noch die Numerierung von H_1 bis H_4 passend, so sehen wir, daß wir $\eta_2 = (+ - + * \cdots)$ wählen können. Die vierte Komponente von η_2 muß $+$ sein, denn sonst trennen η_1 und η_2 bereits H_1 bis H_4; das ist aber nicht möglich, denn für das abgeleitete System $\mathfrak{A}' = \{\eta_1, \eta_2, \eta\}$, η Produkt der von η_1, η_2 verschiedenen $\eta' \in \mathfrak{A}$, wäre dann $r(\mathfrak{A}') = 3$ und $i(\mathfrak{A}') \geqq 4$, im Widerspruch zu 3). Folglich ist $\eta_2 = (+ - + + \cdots)$. Ebenso sieht man, daß man $\eta_3 = (+ + + - \cdots)$ wählen kann. Ersetzen wir nun in $\mathfrak{A}$ das Paar η_2, η_3 durch das Produkt $\eta_0 = \eta_2\eta_3 = (+ - + - \cdots)$, so erhalten wir ein abgeleitetes System $\mathfrak{A}''$, das zwei Involutionen η_0 und η_1 enthält, die die ersten vier Summanden H_1 bis H_4 trennen. Hieraus leitet man genau wie eben einen Widerspruch zu 3) her. Damit ist gezeigt, daß η_1 nicht in $\mathfrak{A}$ liegen kann und Satz 1 somit bewiesen. Wir nennen die durch Satz 1 gekennzeichneten Systeme vertauschbarer Involutionen *Zerlegungs-Systeme* oder kürzer *Z-Systeme*.

Wir werden nun eine Reihe von Eigenschaften direkter Zerlegungen von G durch gruppentheoretische Eigenschaften der zugehörigen Involutionen $\varepsilon \in \Gamma(G)$ kennzeichnen. Sei ε eine im folgenden feste von -1 verschiedene Involution aus Γ und $\Theta = \Theta(\varepsilon)$ das System aller mit ε vertauschbaren Involutionen aus Γ. Wir wollen zeigen:

Satz 2. *Sei $\Pi^1 = \Pi^1(\varepsilon)$ das System aller von -1 und $\pm\varepsilon$ verschiedenen $\eta \in \Theta(\varepsilon)$, die auf G_ε^+ gleich ± 1 sind und $\Pi^2 = \Pi^2(\varepsilon)$ das System aller von -1 und $\pm\varepsilon$ verschiedenen $\eta \in \Theta(\varepsilon)$, die auf G_ε^- gleich ± 1 sind. Dann gilt:*

1) *$\Pi^1 \cup \Pi^2$ besteht genau aus allen $\eta \in \Theta(\varepsilon)$ mit $i\{\varepsilon, \eta\} = 3$.*

2) *Π^1 und Π^2 sind elementweise vertauschbar.*

3) *Ist $\eta \in \Pi^i$, $i = 1, 2$, und $\eta' \in \Pi^1 \cup \Pi^2$ mit η vertauschbar, so ist $\eta' \in \Pi^k$, $k = 2, 1$, genau dann, wenn $i\{\varepsilon, \eta\eta'\} = 4$ ist.*

$\Pi^1(\varepsilon)$ und $\Pi^2(\varepsilon)$ ist das einzige Paar von Teilsystemen aus $\Theta(\varepsilon)$, das den Bedingungen 1) bis 3) genügt.

Beweis. Zunächst sieht man sofort:

(1.4) *$\eta \in \Theta$ ist auf G_ε^+ oder G_ε^- genau dann gleich ± 1 und von -1 und $\pm\varepsilon$ verschieden, wenn $i\{\varepsilon, \eta\} = 3$ ist.*

Denn η ist auf G_ε^+ und G_ε^- genau dann von ± 1 verschieden, wenn die zu $\{\varepsilon, \eta\}$ gehörige Zerlegung von G vier von Null verschiedene Summanden enthält, d. h. wenn $i\{\varepsilon, \eta\} = 4$ ist. Es folgt, daß 1) für Π^1 und Π^2 erfüllt ist. 2) folgt sofort aus der Betrachtung der zu ε gehörigen Darstellung der Automorphismen durch zweireihige Matrizen. 3) folgt aus

(1.5) *Sind η und η' aus $\Pi^1 \cup \Pi^2$ und vertauschbar, so ist $i\{\varepsilon, \eta\eta'\} = 4$ gleichbedeutend damit, daß η und η' nicht im selben Π^i liegen.*

Liegen etwa η und η' in Π^2, so sind beide auf G_ε^- gleich ± 1, folglich ist auch $\eta\eta'$ auf G_ε^- gleich ± 1, also $i\{\varepsilon, \eta\eta'\} \leqq 3$. Ist dagegen etwa $\eta \in \Pi^1$ und

$\eta' \in \Pi^2$, so ist $\eta\eta'$ auf G_ε^+ und G_ε^- von ± 1 verschieden, also nach Satz 1 $i\{\varepsilon, \eta\eta'\} = 4$.

Nun sei $\mathsf{P}^1, \mathsf{P}^2$ ein Paar von Teilmengen, das den Bedingungen 1) bis 3) aus Satz 2 genügt. Sind P^1 und P^2 leer, so existiert nach 1) kein $\eta \in \Theta$ mit $i\{\varepsilon, \eta\} = 3$; das bedeutet, daß G_ε^+ und G_ε^- nicht direkt zerlegbar sind. Dann sind auch Π^1 und Π^2 leer und die Behauptung stimmt. Nun sei etwa $\eta \in \mathsf{P}^1$. Dann ist wegen 1) bei passender Numerierung auch $\eta \in \Pi^1$. Ist $\eta' \in \mathsf{P}^2$, so ist wegen 3) $i\{\varepsilon, \eta\eta'\} = 4$, nach (1.5) also $\eta' \in \Pi^2$, d.h. es ist $\mathsf{P}^2 < \Pi^2$. Falls P^2 nicht leer ist, schließt man genau so $\mathsf{P}^1 < \Pi^1$, wegen $\Pi^1 \cap \Pi^2 = \emptyset$ und 1) also $\mathsf{P}^1 = \Pi^1$ und $\mathsf{P}^2 = \Pi^2$. Ist dagegen P^2 leer, so folgt aus 3), daß für jedes mit η vertauschbare $\eta' \in \Pi^1 \cup \Pi^2$ gilt: $i\{\varepsilon, \eta\eta'\} \leqq 3$; aus (1.5) folgt hieraus $\eta' \notin \Pi^2$, d.h. Π^2 ist leer. Daraus folgt dann wieder $\mathsf{P}^1 = \Pi^1$, $\mathsf{P}^2 = \Pi^2$. Damit ist Satz 2 bewiesen. Folgerung:

(1.6) *G_ε^+ und G_ε^- sind dann und nur dann unzerlegbar, wenn Π^1 und Π^2 leer sind. Genau eine der Gruppen $G_\varepsilon^\pm$ ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn genau eines der Systeme Π^1, Π^2 leer ist.*

Wir wollen nun noch untersuchen, wann G_ε^+ und G_ε^- isomorphe direkte Summanden abspalten. Die Antwort erhalten wir in

Satz 3. *G_ε^+ und G_ε^- haben dann und nur dann isomorphe eigentliche direkte Summanden, wenn ein Z-System $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ und eine Involution $\eta \in \mathfrak{c}\{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:*

$$\varepsilon = \varepsilon_3\varepsilon_4, \qquad \eta\varepsilon_2 = \varepsilon_3\eta.$$

G_ε^+, bzw. G_ε^- ist genau dann zu einem direkten Summanden von G_ε^-, bzw. G_ε^+ isomorph, wenn ein Z-System $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ und eine Involution $\eta \in \mathfrak{c}\{\varepsilon_1\}$ existiert mit

$$\varepsilon = \varepsilon_3, \qquad \eta\varepsilon_2 = \varepsilon_3\eta.$$

Beweis. Sei $G_\varepsilon^+ = H_1 \oplus H_2$, $G_\varepsilon^- = H_3 \oplus H_4$ und γ ein fester Isomorphismus von H_2 auf H_3. In der zu $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ gehörigen Matrizendarstellung sei

$$(\eta) \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ das zugehörige Z-System. Man sieht sofort, daß die Bedingungen von Satz 3 hiervon erfüllt werden. Sei umgekehrt $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ ein zusammen mit der Involution $\eta \in \mathfrak{c}\{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}$ den Bedingungen in Satz 3 genügendes Z-System. Durch Änderung von 0, 2 oder 4 Vorzeichen können wir erreichen, daß die ε_i die zur Zerlegung $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ gehörigen Involutionen sind und eine Gleichung $\eta\varepsilon_2 = \pm\varepsilon_3\eta$ gilt. Die Matrixform von η zeigt nun, daß das Vorzeichen — hier nicht möglich ist, da wegen $\eta \in \mathfrak{c}\{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}$ dann die erste und vierte Zeile und Spalte verschwinden müßte. Folglich ist $\eta\varepsilon_2 = \varepsilon_3\eta$. Hieraus, aus $\eta \in \mathfrak{c}\{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}$ und aus $\eta^2 = 1$ folgt, daß η die Form (η) haben muß, wobei γ ein Isomorphismus von H_2 auf H_3 ist. Damit ist der erste Fall von Satz 3 bewiesen. Der zweite läßt sich ganz analog beweisen.

§2. p-Gruppen für $p > 2$

Wir wollen nun mit Hilfe der Ergebnisse von § 1 den folgenden Satz beweisen:

Satz 4. *Sind G und G' zwei abelsche p-Gruppen, $p \neq 2$, und hat die Faktorgruppe von G nach der maximalen Divisionsuntergruppe D endlichen Exponenten, so sind G und G' isomorph, falls die Automorphismengruppen $\Gamma = \Gamma(G)$ und $\Gamma' = \Gamma(G')$ isomorph sind.*

Wir erinnern zunächst daran, daß die abelschen p-Gruppen als Moduln über dem Ring $\mathfrak{P}$ der ganzen p-adischen Zahlen aufgefaßt werden können. Die Multiplikationen mit den p-adischen Zahlen ergeben dabei genau die zentralen Endomorphismen, insbesondere besteht das Zentrum $\mathfrak{z}\Gamma$ von Γ genau aus den Multiplikationen mit den Einheiten aus $\mathfrak{P}$. Hat G den (genauen) Exponenten p^e, $e \leqq \infty$, so ist G ein „unitärer" $\mathfrak{P}/(p^e)$-Modul, d.h. die Multiplikationen mit p-adischen Zahlen ergeben eine *treue* Darstellung des Faktorringes $\mathfrak{P}/(p^e)$ ($= \mathfrak{P}$ für $e = \infty$). Aus der Struktur der Einheitengruppe von $\mathfrak{P}$ folgt deshalb

(2.1) *Hat die abelsche p-Gruppe G den genauen Exponenten p^e, $e \leqq \infty$, so ist*

$$\mathfrak{z}\Gamma(G) \cong Z(p-1) \oplus Z(p^{e-1}) \quad \text{falls } e < \infty$$

und

$$\mathfrak{z}\Gamma(G) \cong Z(p-1) \oplus \mathbf{Z} \quad \text{falls } e = \infty,$$

$\mathbf{Z}$ die Gruppe der ganzen rationalen Zahlen.

Aus (2.1) und (0.2) folgt

(2.2) *Ist ε eine von -1 verschiedene Involution aus Γ, p^h der Exponent von G_ε^+ und p^l der Exponent von G_ε^-, so ist*

$$\mathfrak{z}\mathfrak{c}\{\varepsilon\} \cong Z(p-1) \oplus Z(p-1) \oplus Z_{h-1} \oplus Z_{l-1}$$

mit $Z_n = Z(p^n)$ für $n < \infty$ und $Z_\infty = \mathbf{Z}$.

Aus (2.2) folgt, daß die Exponenten von G_ε^+ und G_ε^- nur von ε abhängen. Wir setzen

$$\mathfrak{p}(\varepsilon) = \min(p^h, p^l).$$

Die in Satz 4 ausgesprochene Eigenschaft von G ist gleichbedeutend damit, daß Γ keine Involution ε mit $p^e < \mathfrak{p}(\varepsilon) < p^\infty$ enthält, wobei p^e der reduzierte Exponent von G, d.h. der Exponent von G/D ist. Wegen der Isomorphie von Γ und Γ' hat dann auch G' den reduzierten Exponenten p^e.

Wir bemerken weiter, daß die Gruppen G mit endlichen reduzierten Exponenten stets direkt in zyklische, bzw. quasizyklische Summanden zerlegbar sind:

$$(2.3) \qquad G = \sum_\mu Z_\mu, \quad Z_\mu \cong Z(p^{e_\mu}), \quad e_\mu \leqq e \text{ oder } e_\mu = \infty.$$

G ist genau dann zyklisch, wenn Γ abelsch ist, G ist nach (1.6) genau dann direkte Summe zweier zyklischen Gruppen, wenn Γ eine Involution $\varepsilon \neq -1$

enthält, für die $\Pi^1(\varepsilon)$ und $\Pi^2(\varepsilon)$ leer sind. Die Ordnungen der beiden Summanden sind nach (2.2) um 1 größer als die Invarianten der p-Untergruppe von $\mathfrak{z}\mathfrak{c}\{\varepsilon\}$. Daraus folgt die Richtigkeit von Satz 4 für ein- und zweirangiges G, wir können uns nun also auf den Fall beschränken, in welchem die Summe in (2.3) mehr als zwei Summanden Z_μ enthält. Sei ε_μ diejenige Involution aus Γ, die auf Z_μ gleich -1 und auf Z_ν, $\nu \neq \mu$, gleich 1 ist und Λ das System aller dieser ε_μ. Λ hat folgende Eigenschaften:

(2.4) 1) *Aus* $\varepsilon \in \Lambda$ *folgt* $-\varepsilon \notin \Lambda$,

2) *aus* $\varepsilon \in \Lambda$ *folgt nach* (1.6), *daß* $\Pi^1(\varepsilon)$ *oder* $\Pi^2(\varepsilon)$ *leer ist*,

3) *aus* $\varepsilon \in \mathfrak{c}\Lambda$ *und* $\Pi^i(\varepsilon) = \emptyset$ *für* $i = 1$ *oder* $i = 2$ *folgt* $\varepsilon \in \Lambda$.

Wir werden nun zeigen: Bis auf die Vorzeichen der ε_μ sind die Systeme Λ, die wie oben beschrieben zu direkten Zerlegungen (2.3) gehören, die einzigen, die den Bedingungen (2.4) genügen. Sei also Λ ein System vertauschbarer Involutionen aus Γ, das den Bedingungen (2.4) genügt. Die Bedingung (2.4), 2) bedeutet nach (1.6), daß G_ε^+ oder G_ε^- unzerlegbar, also (quasi)zyklisch ist. Da Vorzeichenänderung der $\varepsilon \in \Lambda$ für die Eigenschaften (2.4) ohne Bedeutung ist, können wir annehmen, daß etwa $G_{\varepsilon_\mu}^- = Z_\mu$ zyklisch ist für alle $\varepsilon_\mu \in \Lambda$. Die Projektion $\pi_\mu = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_\mu)$ ist dann 1 auf Z_μ und 0 auf allen Z_ν, $\nu \neq \mu$; ist also etwa

$$\sum_\nu z_\nu = p^k x, \qquad z_\nu \in Z_\nu,$$

in G, so folgt $z_\mu = p^k \pi_\mu x$, d. h., da Z_μ eine reine Untergruppe ist: $z_\mu = p^k y_\mu$, $y_\mu \in Z_\mu$ und $z_\mu = 0$ falls $x = 0$ ist. Hieraus folgt, daß die Z_μ direkt eine reine Untergruppe $B = \sum_\mu Z_\mu$ erzeugen. Ist $\overline{D}$ die maximale Divisionsuntergruppe von $\overline{G} = G/B$, so hat auch $\overline{G}/\overline{D}$ endlichen Exponenten und $\overline{G}$ ist direkt zerlegbar. Nach einem Satz von KULIKOFF ist B dann direkter Summand von G. Wegen (2.4), 3) muß dann $B = G$ sein. Folglich gehört Λ zur Zerlegung $G = \sum_\mu Z_\mu$ mit $Z_\mu = G_{\varepsilon_\mu}^-$, $\varepsilon_\mu \in \Lambda$.

Ist nun wie in Satz 4 eine weitere p-Gruppe G' gegeben und Φ ein Isomorphismus von Γ auf Γ', so ist $\Phi(\Lambda) = \Lambda'$ ein System vertauschbarer Involutionen aus Γ', das wegen § 1, Satz 2, wieder den Bedingungen (2.4) genügt. Folglich gehört zu Λ' eine Zerlegung $G' = \sum_\mu Z'_\mu$. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß für jedes p^n in G und in G' gleichviele Summanden Z_μ, bzw. Z'_μ dieser Ordnung vorkommen.

Enthält die Summe (2.3) mehr als einen Summanden Z_μ maximaler Ordnung p^k, so bedeutet das die Existenz eines ε aus Λ mit $\mathfrak{p}(\varepsilon) = p^k$. Für ein beliebiges $\varepsilon_\mu \in \Lambda$ ist dann die Ordnung von Z_μ nach (2.2) gleich $\mathfrak{p}(\varepsilon_\mu)$. In diesem Falle haben sogar entsprechende Summanden Z_μ und Z'_μ in G und G' dieselbe Ordnung. Enthält G und somit auch G' genau einen Summanden Z_ω, bzw. Z'_ω maximaler Ordnung p^k, so sei p^g die zweitgrößte unter den Ordnungen der Z_μ und Z'_ν. Ist $\mathfrak{p}(\varepsilon_\mu) < p^g$, so haben Z_μ und Z'_μ dieselbe Ordnung $\mathfrak{p}(\varepsilon_\mu)$. Ist dagegen $\mathfrak{p}(\varepsilon_\mu) = p^g$, so hat Z_μ die Ordnung p^g oder die Ordnung p^k, dasselbe gilt für Z'_μ. Da aber genau ein Z_μ und genau ein Z'_ν die Ordnung p^k hat,

müssen gleich viele Z_μ und Z'_ν die Ordnung p^s haben. Damit ist Satz 4 bewiesen. Es ist zu vermuten, daß Z_μ und Z'_μ *stets* dieselbe Ordnung haben, zumindest im Falle $p>3$. Allgemein können wir für $p>2$ zeigen:

Satz 5. *Haben die abelschen p-Gruppen G und G' isomorphe Automorphismengruppen Γ und Γ', so haben sie auch isomorphe Basisuntergruppen* *).

Wir können uns beim Beweis dieses Satzes wegen Satz 4 auf den Fall beschränken, daß die maximalen reduzierten Faktorgruppen von G und G' nicht endlichen Exponenten haben. Dann erhält man die Struktur der Basisuntergruppen etwa von G aus einer Folge direkter Zerlegungen

$$\text{(i)} \qquad G = B_i \oplus H_i, \quad i \leq \infty,$$

wobei B_i direkte Summe zyklischer Summanden $Z(p^i)$ ist und H_i und B_i keine isomorphen direkten Summanden haben. Sei ε_i die zu (i) gehörige Involution und $\Pi_i^\pm = \Pi^\pm(\varepsilon_i)$. Die eben erwähnten Eigenschaften der Zerlegung (i) sind gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{p}(\eta) = p^i$ für alle $\eta \in \Pi_i^+$, $\mathfrak{p}(\eta') \neq p^i$ für alle $\eta' \in \Pi_i^-$ und $\mathfrak{p}(\varepsilon_i) = p^i$ ist. Daraus folgt, daß diese Eigenschaften zu gruppentheoretischen Eigenschaften von Γ äquivalent sind. Wegen der Isomorphie von Γ und Γ' erhält man also eine Folge von Zerlegungen $G' = B'_i \oplus H'_i$ von G' mit denselben Eigenschaften wie (i). Die Isomorphie von B_i und B'_i zeigt man fast genauso wie die von G und G' in Satz 4.

§ 3. p-Gruppen für $p > 3$

Wir wollen nun zeigen, daß die Voraussetzung über den reduzierten Exponenten der Gruppe G in Satz 4 entbehrlich ist, falls $p>3$ ist, d. h. wir wollen beweisen:

Satz 6. *Die abelschen p-Gruppen G und G' sind, falls nur $p>3$ ist, isomorph, wenn ihre Automorphismengruppen $\Gamma = \Gamma(G)$ und $\Gamma' = \Gamma(G')$ isomorph sind.*

Zum Beweis dieses Satzes reichen allerdings die Ergebnisse aus § 1 über die Involutionen nicht mehr aus. Wir müssen vielmehr eine genauere Analyse der mit den direkten Zerlegungen (0) verknüpften Matrixdarstellungen der Automorphismen der Gruppen vornehmen.

Sei $\mathsf{E} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ ein Z-System der p-Gruppe G, $p \neq 2$, und (0) die zu E gehörige direkte Zerlegung von G. Mit Δ_E, bzw. ∇_E bezeichnen wir die Menge aller Automorphismen $\alpha \in \Gamma(G)$, deren zu (0) gehörige Matrix die Form

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \ldots & 1 & 0 \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ 0 & 1 & \ldots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*) Vgl. die Fußnote am Ende von § 0.

hat, also

$$\Delta_{\mathsf{E}} = \{\alpha = (\alpha_{ik}) \in \Gamma;\ \alpha_{ik} = 0 \text{ für } i < k,\ \alpha_{ii} = 1\}$$
$$\nabla_{\mathsf{E}} = \{\alpha = (\alpha_{ik}) \in \Gamma;\ \alpha_{ik} = 0 \text{ für } i > k,\ \alpha_{ii} = 1\}.$$

Ein wesentlicher Schritt im Beweis von Satz 6 wird im Nachweis der Invarianz der Systeme Δ_{E} und ∇_{E} bestehen.

Satz 7. *Seien G und G' abelsche p-Gruppen, $p > 3$, Γ und Γ' ihre Automorphismengruppen und E bzw. E' Z-Systeme aus Γ bzw. Γ'. Ist Φ ein Isomorphismus von Γ auf Γ' und $\Phi(\mathsf{E}) = \mathsf{E}'$, so ist entweder*

$$\Phi(\Delta_{\mathsf{E}}) = \Delta_{\mathsf{E}'} \quad \text{und} \quad \Phi(\nabla_{\mathsf{E}}) = \nabla_{\mathsf{E}'} \qquad (1.\ \text{Fall})$$

oder

$$\Phi(\Delta_{\mathsf{E}}) = \nabla_{\mathsf{E}'} \quad \text{und} \quad \Phi(\nabla_{\mathsf{E}}) = \Delta_{\mathsf{E}'} \qquad (2.\ \text{Fall}).$$

Der zweite Fall kann nur dann eintreten, wenn G und G' zur Torsionsuntergruppe eines direkten Produktes endlicher zyklischen p-Gruppen isomorph sind.

Wir beweisen Satz 7 zunächst ohne die letzte Behauptung im Falle $n = 2$, d.h. für $\mathsf{E} = \{\varepsilon, -\varepsilon\}$, $\mathsf{E}' = \{\varepsilon', -\varepsilon'\}$, $\varepsilon \in \Gamma$, $\varepsilon' = \Phi(\varepsilon) \in \Gamma'$. Wir setzen in diesem Falle $\Delta = \Delta_{\mathsf{E}}$, $\nabla = \nabla_{\mathsf{E}}$, $\Delta' = \Delta_{\mathsf{E}'}$ und $\nabla' = \nabla_{\mathsf{E}'}$. Sei

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} \in \Delta, \qquad \alpha \neq 1,$$

und

$$\alpha' = \Phi(\alpha) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix} \in \Gamma'.$$

Wir behaupten: $\xi_1 = \xi_4 = 1$ und stets $\xi_2 = 0$ oder stets $\xi_3 = 0$. Sei

$$\omega = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}\mathfrak{c}\{\varepsilon\}.$$

Dann ist

$$\omega' = \Phi(\omega) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}\mathfrak{c}\{\varepsilon'\},$$

wobei s_1 und s_2 p-adische Einheiten sind. Wir setzen

$$s = s_1 s_2^{-1}, \qquad \varrho = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \omega' = s_2 \varrho, \quad s_2 \in \mathfrak{z}\Gamma'.$$

Aus den Relationen $(\varepsilon\alpha)^2 = 1$ und $\omega^{-1}\alpha\omega = \alpha^2$ erhalten wir durch Anwendung von Φ die Relationen

$$(\varepsilon'\alpha')^2 = 1, \qquad \omega'^{-1}\alpha'\omega' = \varrho^{-1}\alpha'\varrho = \alpha'^2$$

oder ausgeschrieben für die Koeffizienten:

(i)	$\xi_1^2 - \xi_2\xi_3 = 1$,	(ii)	$\xi_1 = \xi_1^2 + \xi_2\xi_3$
(iii)	$\xi_1\xi_2 = \xi_2\xi_4$,	(iv)	$\xi_2 = s(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_4)$
(v)	$\xi_3\xi_1 = \xi_4\xi_3$,	(vi)	$s\xi_3 = \xi_3\xi_1 + \xi_4\xi_3$
(vii)	$\xi_4^2 - \xi_3\xi_2 = 1$,	(viii)	$\xi_4 = \xi_4^2 + \xi_3\xi_2$.

Wir setzen $\xi = \xi_2\xi_3$. Aus (iii) und (iv) bzw. (v) und (vi) folgt:

(ix) $\qquad \xi = 2s\xi_1\xi, \qquad$ (x) $\qquad s\xi = 2\xi\xi_1.$

Aus (i) und (ii) folgt $\xi_1 = 1 + 2\xi$, also wegen (x):

$$\xi_1^2 = \xi_1 + 2\xi\xi_1 = \xi_1 + s\xi.$$

Hieraus und aus (ii) folgt:

(xi) $\qquad (1+s)\,\xi_2\xi_3 = 0.$

Wir zeigen nun: Aus $1 + s \equiv 0 \pmod{p}$ folgt $p = 3$: Ist $-s \equiv 1 \pmod{p}$, so können wir aus $-s$ die $(p-1)$-te p-adische Wurzel ziehen: $-s = t^{p-1}$ mit p-adischer Eins-Einheit t. Wir haben also

$$\omega' = \pm s_2\varepsilon'\tau'^{p-1}, \qquad \tau' = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}\,\mathfrak{c}\{\varepsilon'\}.$$

Anwendung von Φ^{-1} ergibt

(3.1) $\qquad \omega = z\varepsilon\tau^{p-1}$

mit p-adischer Einheit z, $\tau = \Phi^{-1}(\tau') = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}\,\mathfrak{c}\{\varepsilon\}$. Aus (3.1) folgt

$$2 \equiv -z t_1^{p-1} \pmod{p}, \qquad 1 \equiv z t_2^{p-1} \pmod{p}$$

d.h. $2 \equiv -z \pmod{p}$, $1 \equiv z \pmod{p}$, also $3 \equiv 0 \pmod{p}$, $p = 3$, wie behauptet.

Da wir $p > 3$ vorausgesetzt haben, dürfen wir aus (xi) nun $\xi_2\xi_3 = 0$, wegen (i) und (ii) also $\xi_1 = 1$ schließen, ganz entsprechend folgt $\xi_4 = 1$. Aus (iv) und (vi) erhält man somit

(3.2) $\qquad (2s-1)\,\xi_2 = 0,$

(3.3) $\qquad (s-2)\,\xi_3 = 0.$

Wegen $\alpha \notin \mathfrak{c}\{\varepsilon\}$ ist $\alpha' \notin \mathfrak{c}\{\varepsilon'\}$, d.h. es kann nicht $\xi_2 = \xi_3 = 0$ sein. Somit folgt aus (3.2) und (3.3)

(3.4)
$$\begin{cases} \textit{entweder} & s \equiv 2 \pmod{p} & \textit{im 1. Fall} \\ \textit{oder} & s \equiv \tfrac{1}{2} \pmod{p} & \textit{im 2. Fall.} \end{cases}$$

Im 1. Fall folgt aus (3.2) $\xi_2 = 0$, d.h. $\alpha' \in \Delta'$, im 2. Fall folgt aus (3.3) $\xi_3 = 0$, d.h. $\alpha' \in \nabla'$. Da das Vorliegen eines der beiden Fälle (3.4) von der Wahl des $\alpha \in \Delta$ unabhängig ist, gilt folglich allgemein $\Phi(\Delta) < \Delta'$ im 1. und $\Phi(\Delta) < \nabla'$ im 2. Fall, genauso $\Phi(\nabla) < \nabla'$ im 1. und $\Phi(\nabla) < \Delta'$ im 2. Fall. Da man die Rollen von G und G' vertauschen kann, gilt entsprechend $\Phi^{-1}(\Delta') < \Delta$ usw., wir haben also schließlich

$$\Phi(\Delta) = \Delta', \quad \Phi(\nabla) = \nabla' \qquad \text{im 1. Fall,}$$

$$\Phi(\Delta) = \nabla', \quad \Phi(\nabla) = \Delta' \qquad \text{im 2. Fall.}$$

Der Fall $n>2$ wird auf den eben behandelten $n=2$ zurückgeführt. Sei für $n>2$

$$\mathsf{E}=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\},\quad \mathsf{E}'=\Phi(\mathsf{E})=\{\varepsilon_1',\varepsilon_2',\dots,\varepsilon_n'\},$$

also $\varepsilon_i'=\Phi(\varepsilon_i)$. Wir setzen

$$\vartheta_i=\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_i,\quad \vartheta_i'=\Phi(\vartheta_i)=\varepsilon_1'\varepsilon_2'\dots\varepsilon_n'.$$

Die Systeme $\Delta_i=\Delta_{\Theta_i}$ und $\nabla_i=\nabla_{\Theta_i}$, die zu $\Theta_i=\{\vartheta_i,-\vartheta_i\}$ gehören, lassen sich in natürlicher Weise als Teile der Systeme $\Delta=\Delta_{\mathsf{E}}$ und $\nabla=\nabla_{\mathsf{E}}$ auffassen, genauso die entsprechend definierten Systeme $\Delta_i'=\Delta_{\Theta_i'}$, $\Theta_i'=\Phi(\Theta_i)$, und $\nabla_i'=\nabla_{\Theta_i'}$ als Teile von $\Delta'=\Delta_{\mathsf{E}'}$ und $\nabla'=\nabla_{\mathsf{E}'}$. Ferner kann man durch Induktion leicht beweisen

$$\Delta=\Delta_1\Delta_2\dots\Delta_{n-1},\quad \nabla=\nabla_1\nabla_2\dots\nabla_{n-1}, \tag{3.5}$$

entsprechend für Δ' und ∇'. Da für zwei von 0 verschiedene abelsche p-Gruppen H und H' dann und nur dann $\mathrm{Hom}(H,H')=0$ ist, wenn H teilbar und H' reduziert ist, ist $\mathrm{Hom}(H_1,H_n)\neq 0$ oder $\mathrm{Hom}(H_n,H_1)\neq 0$. Wir nehmen etwa den ersten Fall an und wählen ein $\gamma\neq 0$ aus $\mathrm{Hom}(H_1,H_n)$. Der durch

$$\alpha_{ik}=\delta_{ik}\quad\text{für}\quad (i,k)\neq(n,1),\quad \alpha_{n1}=\gamma,$$

definierte Automorphismus $\alpha=(\alpha_{ik})\in\Delta$ ist dann von 1 verschieden und liegt in allen Δ_i, folglich liegt $\alpha'=\Phi(\alpha)$ in allen $\Phi(\Delta_i)$. Nach dem bereits bewiesenen ist $\Phi(\Delta_i)=\Delta_i'$ oder $\Phi(\Delta_i)=\nabla_i'$. Wegen $\Delta_i'\cap\nabla_j'=\{1\}$ für $i\neq j$ muß wegen $\alpha'\in\Phi(\Delta_i)$ entweder $\Phi(\Delta_i)=\Delta_i'$ für *alle* i oder $\Phi(\Delta_i)=\nabla_i'$ für *alle* i sein. Aus (3.5) folgt dann $\Phi(\Delta)=\Delta'$ (1. Fall) oder $\Phi(\Delta)=\nabla'$ (2. Fall). Ist $\Phi(\Delta_i)=\Delta_i'$, so folgt aus dem für $n=2$ bewiesenen $\Phi(\nabla_i)=\nabla_i'$, folglich ist wegen (3.5) auch $\Phi(\nabla)=\nabla'$ im 1. Fall und $\Phi(\nabla)=\Delta'$ im 2. Fall. Damit ist Satz 7 bis auf die letzte Behauptung bewiesen; diese wird aus dem Beweis von Satz 6 mit hervorgehen.

Um Satz 6 zu beweisen, dürfen wir wegen Satz 4 annehmen, daß G zyklische direkte Summanden beliebig hoher Ordnung hat. In diesem Falle können wir eine Folge direkter Zerlegungen von G bilden:

$$G=Z_1\oplus Z_2\oplus\dots\oplus Z_n\oplus R_n,\quad R_n=Z_{n+1}\oplus R_{n+1}. \tag{3.6}$$

Hier ist $Z_i=(b_i)$ ein zyklischer Summand der Ordnung p^{e_i} mit einem erzeugenden Element b_i. Die Folge (3.6) sei dabei so gewählt, daß stets $e_n<e_{n+1}$ ist. Wir wollen der Einfachheit halber $e_i=i$ annehmen.

Wir fassen die ersten $n-1$ Summanden in (3.6) zusammen: $H_n=Z_1\oplus\dots\oplus Z_{n-1}$ und betrachten die Zerlegung

$$G=H_n\oplus Z_n\oplus Z_{n+1}\oplus R_{n+1}. \tag{3.7}$$

Seien ξ und η ganze Zahlen und ξ durch p teilbar. Die durch $b_n\to\xi b_{n+1}$, bzw. $b_{n+1}\to\eta b_n$ definierten Homomorphismen von Z_n in Z_{n+1}, bzw. Z_{n+1} in Z_n bezeichnen wir ebenfalls mit ξ und η. Zur Zerlegung (3.7) von G gehört

eine Darstellung der Automorphismen von G durch 4-reihige Matrizen (bzw. 3-reihige, falls $n=1$), in dieser sei der Automorphismus $\sigma_n(\xi,\eta)$ durch

$$\sigma_n(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\eta&0\\0&\xi&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

definiert. Für $x\in H_n\oplus R_{n+1}$ ist also $\sigma_n(\xi,\eta)\,x=x$.

Sei $\mathsf{E}_n=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\bar{\varepsilon}_n\}$ das zu (3.6) gehörige System. Für $\varepsilon=\varepsilon_i\in\mathsf{E}_n$ ergibt sich aus (2.2):

$$\mathfrak{p}(\varepsilon_i)=p^i. \tag{3.8}$$

Ferner gilt für alle $i\leqq n$:

$$\sigma_i(\xi,0)\in\Delta_{\mathsf{E}_n},\quad \sigma_i(0,\eta)\in\nabla_{\mathsf{E}_n}. \tag{3.9}$$

Sei nun Φ ein Isomorphismus von Γ auf Γ' und $\mathsf{E}'_n=\Phi(\mathsf{E}_n)$, $\varepsilon'_i=\Phi(\varepsilon_i)$ für alle i und n. Sei

$$G'=Z'_1\oplus Z'_2\oplus\cdots\oplus Z'_n\oplus R'_n \tag{3.10}$$

die zum Z-System E'_n gehörige Zerlegung von G'. Nach (1.6) sind die Z'_i unzerlegbar, also zyklisch, wegen $\mathfrak{p}(\varepsilon'_i)=\mathfrak{p}(\varepsilon_i)$ und (3.8) hat auch Z'_i die Ordnung p^i. Wir wählen in Z'_i erzeugende Elemente c'_i. Genau wie wir die Zerlegung (3.6) zu (3.7) zusammenfaßten, können wir für G' die entsprechenden Zerlegungen definieren:

$$G'=H'_n\oplus Z'_n\oplus Z'_{n+1}\oplus R'_{n+1}. \tag{3.11}$$

Schließlich können wir bezüglich der Erzeugenden c'_i die Automorphismen $\sigma'_n(\xi,\eta)$ von G' genauso wie die Automorphismen $\sigma_n(\xi,\eta)$ von G definieren.

Wir wollen auf die zu den Zerlegungen (3.6) und (3.10) gehörigen Systeme Δ_{E_n} usw. nun Satz 7 anwenden. Dazu bemerken wir, daß wegen $\Delta_{\mathsf{E}_n}<\Delta_{\mathsf{E}_{n+1}}$, $\nabla_{\mathsf{E}_n}<\nabla_{\mathsf{E}_{n+1}}$ entweder *für alle* n der 1. Fall oder *für alle* n der 2. Fall vorliegt, es ist also entweder $\Phi(\Delta_{\mathsf{E}_n})=\Delta_{\mathsf{E}'_n}$ für alle n oder $\Phi(\Delta_{\mathsf{E}_n})=\nabla_{\mathsf{E}'_n}$ für alle n. Wir können deshalb unabhängig von n vom Vorliegen des 1. oder des 2. Falles reden. Wir betrachten nun insbesondere die Bilder der $\sigma_n=\sigma_n(0,1)$ bei Φ. Aus $\sigma_n\in\nabla_{\mathsf{E}_n}$ folgt $\Phi(\sigma_n)\in\nabla_{\mathsf{E}'_n}$ im 1. und $\Phi(\sigma_n)\in\Delta_{\mathsf{E}'_n}$ im 2. Fall. Die σ_n sind mit ε_i, $i<n$, und $\bar{\varepsilon}_{n+1}$ vertauschbar, die $\Phi(\sigma_n)$ sind also mit ε'_i, $i<n$, und $\bar{\varepsilon}'_{n+1}$ vertauschbar. Da sie ferner in $\nabla_{\mathsf{E}'_n}$, bzw. $\Delta_{\mathsf{E}'_n}$ liegen, haben sie in der Diagonale Einsen. Daraus folgt die Existenz ganzer Zahlen l_n und k_n, derart, daß

$$\Phi\big(\sigma_n(0,1)\big)=\sigma'_n(0,l_n)\qquad\text{im 1. Fall,}$$
$$\Phi\big(\sigma_n(0,1)\big)=\sigma'_n(k_n p,0)\qquad\text{im 2. Fall.}$$

Da $\sigma_n(0,1)$, also auch $\sigma'_n(0,l_n)$ die Ordnung p^i hat, muß l_n und ganz entsprechend k_n zu p prim sein. Somit ist auch

$$b'_i=(l_1 l_2\ldots l_{i-1})^{-1}c'_i\qquad\text{(1. Fall)}$$

bzw.

$$b'_i=(-1)^i(k_1 k_2\ldots k_{i-1})\,c'_i\qquad\text{(2. Fall)}$$

erzeugendes Element von Z_i'. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die $\sigma_n'(0, l_n)$, bzw. die $\sigma_n'(k_n p, 0)$ bezüglich dieser neuen Erzeugenden b_i' die Gestalt

$$(3.12)\qquad \begin{cases} \Phi(\sigma_n(0,1)) = \sigma_n'(0,1) & \text{(1. Fall)} \\ \Phi(\sigma_n(0,1)) = \sigma_n'(-p,0) & \text{(2. Fall)} \end{cases}$$

annehmen. Wir haben ferner Gleichungen

$$(3.13)\qquad \begin{cases} \Phi(\sigma_n(p,0)) = \sigma_n'(v_n p, 0) & \text{(1. Fall)} \\ \Phi(\sigma_n(p,0)) = \sigma_n'(0, w_n) & \text{(2. Fall).} \end{cases}$$

Hier sind die v_n und w_n wieder zu p prim.

Sei nun x ein Element aus R_n mit einer Ordnung $o(x) \leq p^n$. Durch $x^n : b_n \to x$ ist ein Homomorphismus x^n von Z_n in R_n definiert. Ist auch $y \in R_n$, $o(y) \leq p^n$, so ist $(x+y)^n = x^n + y^n$. Wir definieren den Automorphismus $\alpha_n(x) \in \Delta_{E_n}$ durch

$$\alpha_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x^n & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrixdarstellung zur Zerlegung $G = H_n \oplus Z_n \oplus R_n$ gehört. Es gilt

$$(3.14)\qquad \alpha_n(x+y) = \alpha_n(x)\,\alpha_n(y).$$

Den $\alpha_n(x)$ entsprechend definieren wir Automorphismen $\alpha_n'(x')$ von G'. Formel (3.14) gilt dann auch für die α_n'. Offenbar ist

$$(3.15)\qquad \alpha_n(p\,b_{n+1}) = \sigma_n(p, 0).$$

Wir betrachten nun zunächst den 1. Fall.

Im 1. Fall vermittelt der Isomorphismus Φ eine Abbildung der $\alpha_n(x)$ auf die Menge aller $\alpha_n'(x')$:

$$\Phi(\alpha_n(x)) = \alpha_n'(x').$$

Da x und $\alpha_n(x)$, $\alpha_n(x)$ und $\alpha_n'(x')$ sowie $\alpha_n'(x')$ und x' dieselbe Ordnung haben, hat x' dieselbe Ordnung wie x. Aus den Formeln (3.14) folgt also, daß durch

$$\varphi_n : x \to \varphi_n(x) = x'$$

ein Isomorphismus φ_n der Untergruppe ${}^{(n)}R_n$ aller $x \in R_n$ mit $o(x) \leq p^n$ auf die Untergruppe ${}^{(n)}R_n'$ definiert ist. Durch

$$(3.16)\qquad \varphi_n\Big(\sum_{i \leq n} \xi_i b_i + x\Big) = \sum_{i \leq n} \xi_i v_{i-1} b_i' + \varphi_n(x)$$

mit $x \in {}^{(n)}R_n$, $v_0 = 1$, ist dann φ_n zu einem Isomorphismus von ${}^{(n)}G$ auf ${}^{(n)}G'$ fortgesetzt.

$$(3.17)\qquad \textit{φ_n und φ_{n+1} stimmen auf ${}^{(n)}G$ überein.}$$

Beweis. Aus (3.16) folgt unmittelbar $\varphi_n(b_i) = \varphi_{n+1}(b_i)$ für $i \leq n$. Aus (3.13) und (3.15) folgt $\varphi_n(p\,b_{n+1}) = v_n p\,b_{n+1}' = \varphi_{n+1}(p\,b_{n+1})$. Sei schließlich

$x, y \in {}^{(n)}R_{n+1}$. Bezüglich (3.7) ist

$$\alpha_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x^n & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{n+1}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y^{n+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine einfache Matrizenrechnung zeigt, daß die folgende Formel gilt:

$$\sigma_n(0,1)\,\alpha_n(x)\,\alpha_{n+1}(y)\,\sigma_n(0,1)^{-1} = \alpha_n(x)\,\alpha_{n+1}(y-x). \tag{3.18}$$

Setzen wir $\varphi_n(x) = x'$, $\varphi_{n+1}(x) = x''$ und $\varphi_{n+1}(y) = y'$, so folgt aus (3.18) durch Anwendung von Φ wegen (3.12):

$$\sigma'_n(0,1)\,\alpha'_n(x')\,\alpha'_{n+1}(y')\,\sigma'_n(0,1)^{-1} = \alpha'_n(x')\,\alpha'_{n+1}(y'-x'').$$

Andererseits gilt (3.18) natürlich genauso für die σ'_n und α'_n, deshalb erhalten wir aus den rechten Seiten beider Formeln

$$\alpha'_n(x')\,\alpha'_{n+1}(y'-x'') = \alpha'_n(x')\,\alpha'_{n+1}(y'-x').$$

Hieraus folgt das gewünschte Resultat $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x)$.

Wegen (3.17) sind die φ_n die Einschränkungen eines Isomorphismus φ von G auf G' auf die Untergruppen ${}^{(n)}G$ und ${}^{(n)}G'$, folglich sind G und G' im 1. Fall isomorph.

Im 2. Fall betrachten wir die kompakte Charaktergruppe $\hat{G}'$ von G'. Zu (3.10) gehört eine Zerlegung

$$\hat{G}' = \hat{Z}'_1 \oplus \hat{Z}'_2 \oplus \cdots \oplus \hat{Z}'_n \oplus \hat{R}'_n, \tag{3.19}$$

derart, daß jeder Summand dieser Summe der Annullator der entsprechenden Komplementärsummanden in (3.10) ist. Sei $\langle x, \hat{y}\rangle$ die kanonische Bilinearform auf $G' \times \hat{G}'$. Für $x \in G'$, $\hat{y} \in \hat{G}'$ ist $\langle x, \hat{y}\rangle$ die Restklasse einer reellen Zahl modulo 1. Wir wählen in $\hat{Z}'_k$ erzeugende Charaktere $\hat{b}_k$, für die

$$\langle b'_i, \hat{b}_k\rangle = \delta_{ik} p^{-i} \pmod 1 \tag{3.20}$$

ist. Im 2. Fall ist ferner das Bild des Elementes $\alpha_n(x) \in \Delta_{\mathbf{E}_n}$ gegeben durch

$$\Phi\big(\alpha_n(x)\big) = \alpha'_n\big(\omega_n(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_n(x) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\omega_n(x)$ jetzt ein Homomorphismus von R'_n in Z'_n ist. Identifizieren wir Z'_n mit der von $p^{-n} \pmod 1$ erzeugten Untergruppe der Gruppe T der reellen Zahlen modulo 1, derart, daß $b'_n = p^{-n} \pmod 1$ wird, so können wir $\omega_n(x)$ auch als Charakter von R'_n auffassen, und zwar hat $\omega_n(x)$ dieselbe Ordnung wie x. Ferner durchläuft $\omega_n(x)$ *alle* Charaktere der Ordnungen $\leqq p^n$ von R'_n, falls x

ganz ${}^{(n)}R_n$ durchläuft. Aus (3.14) folgt wieder

$$\omega_n(x+y) = \omega_n(x) + \omega_n(y),$$

somit ist ω_n ein Isomorphismus von ${}^{(n)}R_n$ auf ${}^{(n)}\hat{R}'_n$.

Nun definieren wir wieder einen Isomorphismus φ_n von ${}^{(n)}G$ auf ${}^{(n)}\hat{G}'$ durch

$$\varphi_n\Big(\sum_{i\leq n} \xi_i b_i + x\Big) = \sum_{i\leq n} \xi_i w_{i-1} b_i + \omega_n(x).$$

Wir behaupten, daß (3.17) ***auch jetzt gilt.*** Zunächst folgt $\varphi_n(b_i) = \varphi_{n+1}(b_i)$ für $i \leqq n$ wieder unmittelbar aus der Definition. Weiter ist

$$\Phi\big(\alpha_n(p\,b_{n+1})\big) = \Phi\big(\sigma_n(p,0)\big) = \sigma'_n(0,w_n) = \alpha'_n\big(\omega_n(p\,b_{n+1})\big),$$

d. h. $\omega_n(p\,b_{n+1})$ ist gleich dem durch

$$b'_{n+1} \to w_n p^{-n} \pmod 1, \qquad R'_{n+1} \to 0$$

definierten Charakter, also wegen (3.20):

$$\varphi_n(p\,b_{n+1}) = \omega_n(p\,b_{n+1}) = w_n p\,b_{n+1} = \varphi_{n+1}(p\,b_{n+1}).$$

Schließlich folgt aus (3.12) und (3.18):

$$(3.21)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma'_n(-p,0)\,\alpha'_n\big(\omega_n(x)\big)\,\alpha'_{n+1}\big(\omega_{n+1}(y)\big)\,\sigma'_n(-p,0)^{-1} \\ \qquad = \alpha'_n\big(\omega_n(x)\big)\,\alpha'_{n+1}\big(\omega_{n+1}(y-x)\big). \end{array}\right.$$

Da wir die Z'_n mit Untergruppen von T identifiziert haben, können wir die Argumente von α'_n als Charaktere χ von R'_n auffassen. Da bei dieser Identifizierung ferner $b'_n = p\,b'_{n+1}$ wird, gilt die (3.18) entsprechende Formel

$$(3.22)\qquad \sigma'_n(-p,0)\,\alpha'_n(\chi)\,\alpha'_{n+1}(\psi)\,\sigma'_n(-p,0)^{-1} = \alpha'_n(\chi)\,\alpha'_{n+1}(\psi-\chi).$$

Für $\chi = \omega_n(x)$, $\psi = \omega_{n+1}(y)$ erhalten wir dann aus (3.21) und (3.22) das gewünschte Resultat $\omega_n(x) = \omega_{n+1}(x)$.

Da die φ_n verträglich sind, definieren sie einen Isomorphismus φ von G auf die Torsionsuntergruppe $\tilde{G}$ der Charaktergruppe $\hat{G}'$ von G'. Nun ist $\hat{G}'$ als kompakte primäre Gruppe algebraisch isomorph zum vollständigen direkten Produkt endlicher zyklischen p-Gruppen, d. h. aber, daß G höhenendlich und zu $\overline{B} = \sum_i{}^{T} B_i$ isomorph ist. Hierbei bezeichnet „$\sum^T$“ die Torsionsuntergruppe des vollständigen direkten Produktes der Summanden; die B_i sind direkte Summen zyklischer Gruppen der Ordnung p^i und $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$ ist isomorph zu den Basisuntergruppen von G. Genau wie $G \cong \overline{B}$ folgt $G' \cong \overline{B}' = \sum_i{}^{T} B'_i$, wobei $B' = \sum_i B'_i$ eine Basisuntergruppe von G' ist. Nun sind B und B' nach Satz 5 isomorph, folglich sind auch $\overline{B}$ und $\overline{B}'$ isomorph. Damit ist die Isomorphie von G und G' auch im zweiten Fall bewiesen. Ferner ist damit auch die letzte Behauptung aus Satz 7 bewiesen.

§ 4. $p \neq q$

Wir wollen jetzt untersuchen, wann eine p-Gruppe G und eine q-Gruppe G' *im Falle* $3 \leqq p < q$ isomorphe Automorphismengruppen haben können. Hat eine der beiden Gruppen, etwa G, keinen endlichen Exponenten, so ist das Zentrum ihrer Automorphismengruppe Γ unendlich, folglich auch das Zentrum von $\Gamma' = \Gamma(G')$ und somit hat dann auch G' unendlichen Exponenten. Die Torsionsuntergruppen von ${}_3\Gamma$ und ${}_3\Gamma'$ haben dann die Ordnungen $p-1$ und $q-1$, aus $\Gamma \cong \Gamma'$ folgt deshalb $p = q$. Falls also $p < q$ ist, müssen G und G' endliche Exponenten p^e und q^f haben. Die Ordnung der Zentren ist dann gleich

$$(p-1)\, p^{e-1} = (q-1)\, q^{f-1}.$$

Wegen $p < q$ folgt hieraus $f = 1$, es ist also

$$q - 1 = (p-1)\, p^{e-1}. \tag{4.1}$$

Somit ist G' Modul über dem Primkörper der Charakteristik q:

$$G' = \sum_{\mu} Z'_{\mu}. \tag{4.2}$$

Der Zerlegung (4.2) korrespondiert auf Grund der Ergebnisse aus § 2 eine Zerlegung

$$G = \sum_{\mu} Z_{\mu}, \quad Z_{\mu} \cong Z(p^e). \tag{4.3}$$

Daß die Summanden Z_{μ} in (4.3) alle die gleiche Ordnung p^e haben müssen, folgt aus Satz 3, denn für *jede* Involution $\varepsilon \neq -1$ aus Γ ist G_{ε}^{+} bzw. G_{ε}^{-} zu einem direkten Summanden von G_{ε}^{-} bzw. G_{ε}^{+} isomorph; dasselbe gilt dann wegen der Isomorphie von Γ und Γ' auch für G'.

Wir wollen nun zeigen, daß die Summen in (4.2) und (4.3) beide nur einen Summanden enthalten, m.a.W., daß G und G' zyklisch sind. Angenommen nämlich, man hätte zwei entsprechende Zerlegungen

$$G = Y \oplus \sum_{\nu} Z_{\nu} \quad \textit{mit} \quad Y = Z_1 \oplus Z_2, \tag{4.4}$$

$$G' = Y' \oplus \sum_{\nu} Z'_{\nu} \quad \textit{mit} \quad Y' = Z'_1 \oplus Z'_2. \tag{4.5}$$

Ist Θ bzw. Θ' das System der zu (4.4) bzw. (4.5) gehörigen Involutionen, so ist

$$\mathfrak{c}(\Theta) \cong \Gamma(Y) \times \mathsf{A} \cong \Phi\big(\mathfrak{c}(\Theta)\big) = \mathfrak{c}(\Theta') \cong \Gamma(Y') \times \mathsf{A}'$$

mit abelschen Gruppen A und A' und einem Isomorphismus Φ von Γ auf Γ'. Es folgt

$$\Gamma(Y)/{}_3\big(\Gamma(Y)\big) \cong \Gamma(Y')/{}_3\big(\Gamma(Y')\big). \tag{4.6}$$

Die Ordnung der rechten Faktorgruppe ist bekanntlich gleich

$$\big((q^2-1)(q^2-q)\big) : (q-1) = q(q^2-1).$$

Die Ordnung von $\Gamma(Y)$ ist gleich

$$(p^{2e} - p^{2(e-1)})(p^{2e} - p^{2e-1}) = p^{4e-3}(p^2 - 1)(p - 1),$$

also die der linken Seite von (4.6) gleich $p^{3e-2}(p^2 - 1)$, folglich:

$$q(q^2 - 1) = p^{3e-2}(p^2 - 1).$$

Wegen $p < q$ muß q also Teiler von $p + 1$ sein, was unmöglich ist. Folglich sind die Zerlegungen (4.4) und (4.5) nicht möglich, d.h. G und G' sind zyklisch. In diesem Falle folgt aus (4.1) dann in der Tat die Isomorphie von Γ und Γ'. Damit ist gezeigt:

Satz 8. *Ist G eine abelsche p-Gruppe, G' eine abelsche q-Gruppe und $3 \leqq p < q$, so sind die Automorphismengruppen $\Gamma(G)$ und $\Gamma(G')$ dann und nur dann isomorph, wenn*

$$q - 1 = (p - 1)\, p^{e-1}$$

und $G \cong Z(p^e)$, $G' \cong Z(q)$ ist.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 10. August 1959)

MACROBERT, T. M.
Math. Zeitschr. 73, 254/255 (1960)

Recurrence Formulae for the *E*-functions

By
T. M. MACROBERT

1. Introductory. In § 2 three recurrence formulae for generalised hypergeometric functions are given, and corresponding formulae for the E-functions are deduced. In § 3 some of these formulae are employed to evaluate certain generalised hypergeometric functions with unit argument.

2. Recurrence formulae. The formula

$$(1)\qquad \begin{cases} F\left(\begin{matrix} k+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ k, \ \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}; z\right) = F(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z) + \\ \qquad + \dfrac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}{k \varrho_1 \cdots \varrho_q} z F(p; \alpha_r + 1 : q; \varrho_s + 1 : z), \end{cases}$$

where $p \leqq q+1$ and, if $p = q+1$, $|z| < 1$, can be verified by comparing the coefficients of z^n on each side.

On replacing z by $-1/z$ and multiplying by $k\{\prod \Gamma(\alpha_r)\}/\{\prod \Gamma(\varrho_s)\}$, the formula can be written

$$(2)\qquad E\left(\begin{matrix} k+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ k, \ \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}; z\right) = k E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z) - z^{-1} E(p; \alpha_r + 1 : q; \varrho_s + 1 : z),$$

and, by generalising, this can be shown to hold for all values of p and q.

Similarly it can be shown that, if $p \leqq q$, and if, when $p = q$, $|z| < 1$,

$$(3)\qquad \begin{cases} F\left(\begin{matrix} k, \frac{1}{2}k+1, & l, & \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \frac{1}{2}k, & k-l+1, & \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}; z\right) = F\left(\begin{matrix} k+1, l+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ k-l+1, \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}; z\right) - \\ \qquad - \dfrac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_q} z F\left(\begin{matrix} k+1, l+1, \alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+1 \\ k-l+1, \varrho_1+1, \ldots, \varrho_q+1 \end{matrix}; z\right); \end{cases}$$

and from this it follows that, for general values of p and q,

$$(4)\qquad \begin{cases} 2l E\left(\begin{matrix} k, \frac{1}{2}k+1, & l, & \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \frac{1}{2}k, & k-l+1, & \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}; z\right) = E\left(\begin{matrix} k+1, l+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ k-l+1, \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}; z\right) + \\ \qquad + z^{-1} E\left(\begin{matrix} k+1, l+1, \alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+1 \\ k-l+1, \varrho_1+1, \ldots, \varrho_q+1 \end{matrix}; z\right). \end{cases}$$

Again, if $p \leqq q+1$ and if, when $p = q+1$, $|z| < 1$,

$$(5)\qquad \begin{cases} F\left(\begin{matrix} k, & \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ k+1, & \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}; z\right) = F(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z) - \\ \qquad - \dfrac{\alpha_1 \cdots \alpha_p}{(k+1) \varrho_1 \cdots \varrho_q} z F\left(\begin{matrix} k+1, \alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+1 \\ k+2, \varrho_1+1, \ldots, \varrho_q+1 \end{matrix}; z\right); \end{cases}$$

and from this it follows that, for general values of p and q,

$$(6)\qquad \begin{cases} k E\left(\begin{matrix} k, & \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ k+1, & \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}; z\right) = E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z) \\ \qquad + z^{-1} E\left(\begin{matrix} k+1, \alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+1 \\ k+2, \varrho_1+1, \ldots, \varrho_q+1 \end{matrix}; z\right). \end{cases}$$

3. Special cases. From (1) it follows that, if $R(k-\alpha-2\beta)>0$,

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, \frac{1}{2}k+1, & \beta; & 1\\ \frac{1}{2}k, & k-\beta+1 & \end{matrix}\right)=F\left(\begin{matrix}\alpha, \beta; & 1\\ k-\beta+1 & \end{matrix}\right)+\frac{2\alpha\beta}{k(k-\beta+1)}F\left(\begin{matrix}\alpha+1, \beta+1; & 1\\ k-\beta+2 & \end{matrix}\right);$$

and, on applying Gauss's theorem on the right, the known formula [*1*, p. 45]

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, \frac{1}{2}k+1, & \beta; & 1\\ \frac{1}{2}k, & k-\beta+1 & \end{matrix}\right)=\frac{k-\alpha}{k}\,\frac{\Gamma(k-\beta+1)\,\Gamma(k-\alpha-2\beta)}{\Gamma(k-\alpha-\beta+1)\,\Gamma(k-2\beta)} \tag{7}$$

is obtained.

Again, from (1), if $R(\alpha-2\beta-2\gamma)>-1$,

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, \frac{1}{2}\alpha+1, & \beta, & \gamma; & 1\\ \frac{1}{2}\alpha, \alpha-\beta+1, & \alpha-\gamma+1 & & \end{matrix}\right)=F\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma; & 1\\ \alpha-\beta+1, \alpha-\gamma+1 & \end{matrix}\right)+$$
$$+\frac{2\beta\gamma}{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\gamma+1)}F\left(\begin{matrix}\alpha+1, & \beta+1, & \gamma+1; & 1\\ \alpha-\beta+2, \alpha-\gamma+2 & & & \end{matrix}\right).$$

Now, from Dougall's second theorem [*2*, p. 372],

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, \frac{1}{2}\alpha+1, & \beta, & \gamma; & 1\\ \frac{1}{2}\alpha, \alpha-\beta+1, & \alpha-\gamma+1 & & \end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}-\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}-\beta)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}-\gamma)};$$

and, from Dixon's theorem [*2*, p. 362],

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma; & 1\\ \alpha-\beta+1, & \alpha-\gamma+1 & & \end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1)\,\Gamma(\alpha-\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1-\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1-\beta)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)}.$$

Hence, if $R(\alpha-2\beta-2\gamma)>-1$,

$$\left\{\begin{aligned}F\left(\begin{matrix}\alpha+1, & \beta+1, & \gamma+1; & 1\\ \alpha-\beta+2, \alpha-\gamma+2 & & & \end{matrix}\right)&=\frac{\Gamma(\alpha-\beta+2)\,\Gamma(\alpha-\gamma+2)}{2\beta\gamma\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)}\times\\ &\times\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}-\beta-\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}-\beta)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}-\gamma)}-\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1-\beta-\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1-\beta)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1-\gamma)}\right].\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Finally, from (3), if n is a positive integer,

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, \frac{1}{2}\alpha+1, & \beta, & -n; & 1\\ \frac{1}{2}\alpha, \alpha-\beta+1, & 2\beta-n+2 & & \end{matrix}\right)=F\left(\begin{matrix}\alpha+1, & \beta+1, & -n; & 1\\ \alpha-\beta+1, & 2\beta-n+2 & & \end{matrix}\right)+$$
$$+\frac{n}{2\beta-n+2}F\left(\begin{matrix}\alpha+1, & \beta+1, & 1-n; & 1\\ \alpha-\beta+1, & 2\beta-n+3 & & \end{matrix}\right).$$

But, by Saalschütz's theorem [*2*, p. 360],

$$F\left(\begin{matrix}\alpha+1, & \beta+1, & -n; & 1\\ \alpha-\beta+1, & 2\beta-n+2 & & \end{matrix}\right)=\frac{(-\beta; n)\,(\alpha-2\beta; n)}{(\alpha-\beta+1; n)\,(-2\beta-1; n)},$$

and

$$F\left(\begin{matrix}\alpha+1, & \beta+1, & 1-n; & 1\\ \alpha-\beta+1, & 2\beta-n+3 & & \end{matrix}\right)=\frac{(-\beta; n-1)\,(\alpha-2\beta; n-1)}{(\alpha-\beta+1; n-1)\,(-2\beta-1; n-1)}.$$

Hence

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, \frac{1}{2}\alpha+1, & \beta, & -n; & 1\\ \frac{1}{2}\alpha, \alpha-\beta+1, & 2\beta-n+2 & & \end{matrix}\right)=\frac{(-\beta-1; n)\,(\alpha-2\beta; n-1)}{(\alpha-\beta+1; n)\,(-2\beta-1; n)}(\alpha-2\beta-1+2n). \tag{9}$$

References

[*1*] Bailey, W. N.: Generalized hypergeometric series. Cambridge 1935. — [*2*] MacRobert, T. M.: Functions of a complex variable, 4th edit. London 1954.

Department of Mathematics, the University, Glasgow, Scotland

(Eingegangen am 21. September 1959)

PARAMESWARAN, M. R., and C. T. RAJAGOPAL
Math. Zeitschr. 73, 256—267 (1960)

Tauberian theorems invariant for a product of two summability methods

By

M. R. PARAMESWARAN and C. T. RAJAGOPAL

1. Introduction. Let $(\mathscr{A})$ and $(\mathscr{B})$ denote two methods of transformation and summability of a function [or sequence] $\hat{s}$. Let $(\mathscr{A}\mathscr{B})$ denote the method of summability involving the $\mathscr{A}$ transform of the $\mathscr{B}$ transform of $\hat{s}$, i.e. the transform $\mathscr{A}(\mathscr{B}\hat{s})$; then $(\mathscr{A}\mathscr{B})$ is the iterative product of the method $(\mathscr{B})$ followed up with the method $(\mathscr{A})$. Further, let $(\mathscr{A})$ be a regular summability method and $(\mathscr{B})$ be one of a scale of summability methods of which $(\mathscr{B}_\alpha)$ is a particular method and $(\mathscr{B}_\beta)$ any method. Then the Tauberian theorems of this paper may be described as results in which $(\mathscr{A}\mathscr{B}_\beta)$ summability [or boundedness], together with a condition on the $\mathscr{B}_\alpha$ transform, implies a result, independent of β, about the convergence [or oscillation] of the $\mathscr{B}_\alpha$ transform. Such Tauberian theorems may be thought of as being invariant for the product of the scale of summability methods $(\mathscr{B})$ each followed up with the method $(\mathscr{A})$. It has been proved in an earlier paper ([11], Theorem B with $\alpha=0$) that the classical Tauberian theorem on the convergence of slowly decreasing sequences summable by ABEL's method (A) is invariant for the product of the class of Cesàro methods $(C^{(\beta)})$ of order $\beta>-1$ each followed up with ABEL's method, in the sense that the theorem is true for a sequence summable $(A\,C^{(\beta)})$ exactly as for a sequence summable (A). It is now proposed to extend certain general Tauberian theorems dealt with by KARAMATA [5], RAMASWAMI [13], MINAKSHISUNDARAM [6] and RAJAGOPAL [9] so as to exhibit their invariant character in a similar sense. The proofs of the extended theorems can be succinctly presented using certain ideas elsewhere introduced by RAJAGOPAL [10, 11].

2. Notation. We confine ourselves to real functions $s(u)$ bounded and integrable in every finite interval of $u\geqq 0$. A special class of such functions, namely, functions of bounded variation in every finite interval of $u\geqq 0$, is indicated by implication wherever there is an integration with respect to $s(u)$; while functions $s(u)$, or others, having other specific properties not evident from the context, are introduced with an explicit statement of these properties. The integrals employed, unless otherwise stated, are either Lebesgue or Lebesgue-Stieltjes integrals.

Certain regular transforms of $s\equiv s(u)$, required in our work, are the following: the Cesàro transform of order $\alpha\geqq 0$,

$$(1)\quad C^{(\alpha)}(s)\equiv C_s^{(\alpha)}(u)=\frac{\alpha}{u^\alpha}\int_0^u (u-x)^{\alpha-1}s(x)\,dx\quad(\alpha>0),\qquad C^{(0)}(s)=s(u);$$

the Hölder transform of integer order $k \geqq 0$,

$$(2)\quad \mathrm{H}^k(s) \equiv H_s^k(u) = \frac{1}{\Gamma(k)\,u} \int_0^u \left(\log \frac{u}{x}\right)^{k-1} s(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad \mathrm{H}^0(s) = s(u);$$

the Hausdorff transform, in the case of Borel-measurable $s(u)$,

$$(3)\quad \mathrm{h}(s, \chi) \equiv h_{s,\chi}(u) = \int_0^1 s(ux)\,d\chi(x), \quad \text{with} \quad \chi(+0) = \chi(0) = 0, \qquad \chi(1) = 1,$$

where $\chi(x)$ is in general a function of bounded variation in $0 \leqq x \leqq 1$ and, in particular cases such as (1) and (2), a monotonic increasing function (making the transformation positive and regular).

Whenever we are concerned with the transformations (1), (2), (3) of a given $s(u)$, we write, for convenience,

$$C_s^{(\alpha)}(u) = C^{(\alpha)}(u) \quad \text{or} \quad C^{(\alpha)}, \qquad H_s^k(u) = H^k(u) \quad \text{or} \quad H^k,$$
$$h_{s,\chi}(u) = h_\chi(u) \quad \text{or} \quad h_\chi.$$

One other transform of $s(u)$, which may be called its Φ transform, is defined by

$$(4)\qquad \Phi(t, s) = \int_0^\infty \varphi(tu)\,ds(u), \qquad t > 0,$$

where $\varphi(u)$ satisfies some or all of the following conditions of which the first alone is sufficient for the transform to be positive and regular.

C (i) $\varphi(u) = \int_u^\infty \psi(u)\,du < \infty$ where $u \geqq 0$, $\psi(u) \geqq 0$, $\int_0^\infty \psi(u)\,du = 1$ [1];

C (ii) $\int_0^\infty \psi(u)\,|\log u|\,du < \infty$, i.e. $\int_0^1 \frac{1-\varphi(u)}{u}\,du < \infty$ and $\int_1^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\,du < \infty$;

C (iii) $\psi(u)$ is monotonic decreasing for $u \geqq 0$;

C (iv) $\int_0^\infty u^{ix}\psi(u)\,du \neq 0$ for $-\infty < x < \infty$.

The convergence [or boundedness] of a transform of s, chosen from (1)–(4), when $u \to \infty$ in the cases of (1)–(3) and $t \to +0$ in the case of (4), is, as usual, taken to define the summability [or boundedness] of s by the method $(C^{(\alpha)})$ or (H^k) or (h_χ) or (Φ) according as the transform chosen is (1) or (2) or (3) or (4). Adopting this definition and the terminology of the Introduction, we may say that the Tauberian theorems of this paper are invariant for summability $(\Phi C^{(\beta)})$ [or boundedness $(\Phi C^{(\beta)})$] where $(C^{(\beta)})$ is any one of the scale of regular Cesàro methods.

---

[1] From condition C (i) it follows that the existence of $\Phi(t, s)$ as an absolutely convergent integral for small positive t (or any $t = t_0 > 0$) ensures the existence of $\Phi(t, s)$ in the same sense for all larger t (or $t > t_0$).

3. Lemmas. The lemmas needed to prove our Tauberian theorems are collected below.

Lemma 1. *If, as is implied by our notation in* (1) *and* (2), $C^{(\alpha)}$ $(\alpha \geqq 0)$ *and* H^k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ *denote the operators which, acting on* s, *transform* s *into* $C^{(\alpha)}(u)$ *and* $H^k(u)$ *respectively, then*

(i) $$H^1 H^k = H^k H^1 = H^{k+1},$$

(ii) $$H^1 C^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha+1} C^{(\alpha+1)} + \frac{\alpha}{\alpha+1} H^1 C^{(\alpha+1)},$$

(iii) $$H^k C^{(\alpha)} = \sum_{r=0}^{k} c_{k,r} H^r C^{(\alpha+k)} \quad \textit{where} \quad \sum_{r=0}^{k} c_{k,r} = 1.$$

(i), (ii) are well known, while (iii) is obtained by induction on k and the use of (ii).

Lemma 2. (a) *If*

(5a) $$\lim_{u\to\infty} \operatorname{bound}_{u \leq u' \leq u\lambda} \{s(u') - s(u)\} = o_L(\log \lambda) \quad \textit{as} \quad \lambda \to 1+0,$$

then

(6a) $$\operatorname{bound}_{u \leq u' \leq u\lambda} \{s(u') - s(u)\} = o_L(1) \log \lambda \quad \textit{as} \quad u \to \infty, \quad \textit{for any} \quad \lambda > 1,$$

(7a) $$s(u) - H^1(u) = o_L(1) \quad \textit{as} \quad u \to \infty.$$

(b) *If*

(5b) $$\lim_{u\to\infty} \operatorname{bound}_{u \leq u' \leq u\lambda} \{s(u') - s(u)\} = -w(\lambda) \to 0 \quad \textit{as} \quad \lambda \to 1+0,$$

then

(6b) $$\operatorname{bound}_{0<u \leq u' \leq u\lambda} \{s(u') - s(u)\} \geqq -A \log \lambda - B \quad \textit{for any} \quad \lambda > 1,$$

A and B being certain positive constants,

(7b) $$s(u) - H^1(u) = O_L(1) \quad \textit{as} \quad u \to \infty.$$

Proof. The derivation of (6a) from (5a) and that of (6b) from (5b) are by a method which has now become familiar (e.g. [6], § 5.1, and [2], Theorem 239).

The derivation of (7a) from (6a) is given below, while that of (7b) from (6b), which is similar and simpler, is omitted. We have

(8) $$s(u) - H^1(u) = s(u) - u^{-1} \int_0^u s(x)\, dx = \int_0^1 \{s(u) - s(ut)\}\, dt = \int_0^\delta \cdots + \int_\delta^1 \cdots,$$

where δ is an arbitrarily given positive proper fraction. If ε is another such fraction, then, by (6a), we can choose u_0 so that

(9) $$\operatorname{bound}_{u \leq u' \leq u\lambda} \{s(u') - s(u)\} > -\varepsilon \log \lambda \quad \text{for} \quad u \geqq u_0 \delta.$$

Also, (5a), being a special case of (5b), implies the following relation exactly as (5b) implies (6b):

(10) $$\operatorname{bound}_{0<u \leq u' \leq u\lambda} \{s(u') - s(u)\} > -A' \log \lambda - B'$$

where A', B' are positive constants. From (8), (9) and (10) we get, for all large u,

$$s(u) - H^1(u) > -\int_0^{\delta} \left(A' \log \frac{1}{t} + B'\right) dt - \varepsilon \int_{\delta}^{1} \log \frac{1}{t}\, dt >$$

$$> -A'\delta |\log \delta| - (A' + B')\delta - K\varepsilon \quad \left(K = \int_0^1 \log \frac{1}{t}\, dt\right),$$

whence, δ and ε being arbitrary, (7a) follows at once.

Lemma 3. (a) *If we are given either* (5a) *or* (6a), *or, in particular,* $s(u) = \int_0^u a(x)\,dx$ *with* $\varliminf_{u\to\infty} u\,a(u) \geqq 0$, *then* (H^1) *boundedness of* $s(u)$ *implies that*

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} s(u) = \operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^1(u)$$

where osc *denotes the closed oscillation interval between the upper and lower limits of the function following under the limit operation indicated by* $\to$.

(b) *If we assume either* (5b), *or, in particular,* $s(u) = \int_0^u a(x)\,dx$ *with* $\varliminf_{u\to\infty} u\,a(u) > -\infty$, *then the* (H^1) *summability of* $s(u)$ *implies that*

$$\lim_{u\to\infty} s(u) = \lim_{u\to\infty} H^1(u).$$

Proof. (a) is established by a well-known method of KARAMATA'S (as in [6], Lemma 2) using the hypothesis in the form of (6a).

(b) is a familiar result.

Lemma 4. (a) *From* (7a) *and the* (H^2) *boundedness of* $s(u)$ *follows*

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^1(u) = \operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^2(u).$$

(b) *From* (7b) *and the* (H^2) *summability of* $s(u)$ *follows*

$$\lim_{u\to\infty} H^1(u) = \lim_{u\to\infty} H^2(u).$$

Proof. (a) Condition (7a) gives us, for $0 < u < u'$,

$$\int_u^{u'} \frac{s(x)}{x}\,dx - \int_u^{u'} \frac{s_1(x)}{x^2}\,dx = o_L(1) \log \frac{u'}{u} \quad (u \to \infty), \quad \text{where} \quad s_1(x) = \int_0^x s(u)\,du,$$

i.e.

$$\int_u^{u'} \frac{s(x)}{x}\,dx + \left[\frac{s_1(x)}{x}\right]_u^{u'} - \int_u^{u'} \frac{s(x)}{x}\,dx = o_L(1) \log \frac{u'}{u},$$

or

$$H^1(u') - H^1(u) = o_L(1) \log \frac{u'}{u}.$$

Hence we get the required result from Lemma 3 (a) with $s(u)$ replaced by $H^1(u)$.

(b) follows similarly from Lemma 3 (b) with $s(u)$ again replaced by $H^1(u)$.

Lemma 5. *If $\Phi(t, s)$ is given by* (4) *with $\varphi(u)$ satisfying* C(i) *and $s(u)$ satisfying the condition $s(0)=0$, then, for $t>0$,*

$$(11) \qquad \Phi(t, s) \equiv \int_0^\infty \varphi(tu)\, d\, s(u) = t \int_0^\infty \psi(tu)\, s(u)\, du \equiv \Psi(t, s), \quad \text{say,}$$

where the integral on the right side (like that on the left side) is absolutely convergent[2].

Proof. (11) is a known result ([8], Lemma 2). The absolute convergence of $\Psi(t, s)$ follows from that of $\Phi(t, s)$ since

$$t \int_0^\infty \psi(tu)\, |s(u)|\, du \leqq t \int_0^\infty \psi(tu)\, du \int_{v=0}^{v=u} |d\, s(v)| = \int_{v=0}^{v=\infty} |d s(v)|\, t \int_v^\infty \psi(tu)\, du$$

$$= \int_0^\infty |d\, s(v)|\, \varphi(tv).$$

Lemma 6. (a) *Let $\Phi(t, s)$ be given by* (4) *with $\varphi(u)$ satisfying* C(i), C(ii) *and $s(u)$ in the form*

$$s(u) = \int_0^u a(x)\, dx \quad \text{where} \quad 0 \leqq \overline{\lim_{u\to\infty}}\, u\, a(u) < \infty.$$

Then

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} s(u) = \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Phi(t, s).$$

(b) *In particular, when* $\lim u\, a(u) = 0$, *(Φ) summability of $s(u)$ implies that*

$$\lim_{u\to\infty} s(u) = \lim_{t\to+0} \Phi(s, t).$$

Proof. The general result (a), in the case $\underline{\lim}\, u\, a(u) = 0$ is due to MINAKSHISUNDARAM ([6], § 3.3 Corollary to Theorem 2). In the case $\underline{\lim}\, u\, a(u) > 0$, $s(u)$ is ultimately monotonic increasing and, since it can only tend to either a finite limit or ∞, the result is trivial.

In the next lemma, $\Psi(t, s)$ can be replaced by $\Phi(t, s)$ when $s(0)=0$, in virtue of Lemma 5.

Lemma 7. (a) *Let $\Psi(t, s)$ be given as in* (11) *for $t>0$, with $\psi(u)$ satisfying* C(i), C(iii). *Let $s(u)$ be bounded below for $u \geqq 0$. Then*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, H^1(u) \leqq K\, \overline{\lim_{t\to+0}}\, \Psi(t, s)$$

where the right-hand limit is supposed to be finite and K is a constant depending only on ψ.

---

[2] Lemma 5 has, in fact, a more general form ([8], Lemma 2) which asserts the validity of (11) for $t = t_0 > 0$, when $\Phi(t_0, s)$ is given to be conditionally convergent and $\Psi(t_0, s)$ is so as a consequence. In the three cases of $\psi(u)$ given in (21), more can be said. In the Laplace and the Lambert cases, $\Psi(t, s)$ is absolutely convergent for $t > t_0$, while in the Stieltjes case $\Psi(t, s)$ is only conditionally so. The proof of the Laplace case is known ([14], Chap. II, Theorem 2.3 *a*), that of the Lambert case is similar, and that of the Stieltjes case depends on the Abel-Dirichlet test for the convergence of integrals.

(b) *If, in* (a), $\psi(u)$ *is subject to the additional condition* C (iv), *then the convergence of* $\Psi(t, s)$ *as* $t \to +0$ *implies that*

$$\lim_{u \to \infty} H^1(u) = \lim_{t \to +0} \Psi(t, s).$$

Proof. (b) is included in a result of HARDY's ([2], Theorem 236) and (a) is implied in his proof of that result.

In (b), the restriction C (iii) on $\psi(u)$ can be dispensed with, as we can see from a theorem of PITT's ([7], Chap. IV, Theorem 19).

Lemma 8. *Let* $\Psi(t, s)$ *be given as in* (11), *in terms of* $\Phi(t, s)$, *for* $t > 0$, *with* $s(0) = 0$ *and* $\varphi(u)$ *satisfying* C (i), C (iii). *Then, for any regular Hausdorff method* (h_χ) *which transforms* s *to* h_χ *according to* (3), $\Psi(t, h_\chi)$ *is defined for* $t > 0$.

(a) *If the method* (h_χ) *is positive as well as regular and if* $\Psi(t, s)$ *is bounded as* $t \to +0$, *then*

$$\operatorname*{osc}_{t \to +0} \Psi(t, h_\chi) \leqq \operatorname*{osc}_{t \to +0} \Psi(t, s),$$

where actually the closed oscillation interval for the left-hand function does not extend beyond the corresponding interval for the right-hand function.

(b) *If* $\Psi(t, s)$ *is convergent as* $t \to +0$, *then*

$$\lim_{t \to +0} \Psi(t, h_\chi) = \lim_{t \to +0} \Psi(t, s)\ ^3).$$

Proof. The proof of the existence of $\Psi(t, h_\chi)$, $t > 0$, and the proof of (b) appear elsewhere ([10], Theorem II). The proof of (a) is a slight modification of that of (b). In the proofs of both (a) and (b), we use the fact that $\Psi(t, s)$ is absolutely convergent and bounded for $0 < t < \infty$, the boundedness of $\Psi(t, s)$ as $t \to \infty$ following from the proof of Lemma 5 which shows that

$$|\Psi(t, s)| \leq \int_0^\infty \varphi(tu)\,|ds(u)| \leqq \int_0^\infty \varphi(u)\,|ds(u)| \quad \text{for} \quad t \geqq 1\ ^4).$$

4. Theorems. The theorems and corollaries of this section include, as special cases, results connecting the oscillation [or convergence] of the Laplace transform of a function with that of a Cesàro transform of non-negative order. There are analogous results for a sequence, involving the Abel transform of the sequence and a Cesàro transform of any real order according to BORWEIN's definition [1] which is the same as the usual one when the order $\alpha > -1$ and which makes Cesàro summability of any order $\alpha \leqq -1$ equivalent to the summability of the same name and order as originally defined by HAUSDORFF [3].

---

3) For the sake of completeness it may be mentioned that there are several other "product theorems" of the type of Lemma 8 (b), either proved or referred to in the papers of JAKIMOVSKI [4] and RAMANUJAN [12].

4) The boundedness of $\Psi(t, s)$ as $t \to \infty$, which is important for the truth of Lemma 8, is known to be involved in the existence of $\Phi(t, s)$ for $t > 0$, in the three cases of $\psi(u)$ mentioned in (21). In these cases the boundedness of $\Psi(t, s)$ as $t \to \infty$ follows from that of $s(u)$ as $u \to +0$ and the existence of $\Phi(t, s)$ merely as a Riemann-Stieltjes integral (conditionally) convergent for $t > 0$. The Laplace and the Stieltjes cases of this result are proved by WIDDER ([14], Chap. V, Theorems 1, 2a); the Lambert case can be proved similarly.

Theorem A. *Suppose that there is an* $\alpha \geqq 0$ *such that*

$$C^{(\alpha)}(u) - C^{(\alpha+1)}(u) = o_L(1) \quad as \quad u \to \infty \tag{12a}$$

where the Cesàro transforms $C^{(\alpha)}$ *and* $C^{(\alpha+1)}$ *are defined by* (1). *Suppose also that, for some* $\beta \geqq 0$, $\Phi(t, C^{(\beta)})$ *is given by* (4) *with* $C^{(\beta)}(u)$ *in place of* $s(u)$ *and with* $\varphi(u)$ *satisfying* C(i), C(ii), C(iii) *of* § 2, *and that*

$$\Phi(t, C^{(\beta)}) = O(1) \quad as \quad t \to +0\ ^{5}). \tag{13a}$$

Then $C^{(\alpha+1)}(u)$ *is bounded as* $u \to \infty$ *and*

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} C^{(\alpha+1)}(u) = \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Phi(t, C^{(\alpha+1)}). \tag{14a}$$

Proof. By Lemma 1—(i), (ii) and (12a), we have

$$\frac{1}{\alpha+1}(C^{(\alpha+1)} - H^1 C^{(\alpha+1)}) = H^1(C^{(\alpha)} - C^{(\alpha+1)}),$$

$$\frac{H^k}{\alpha+1}(C^{(\alpha+1)} - H^1 C^{(\alpha+1)})(s) = H^{k+1}(C^{(\alpha)} - C^{(\alpha+1)})(s) = o_L(1) \tag{15}$$

for any non-negative integer k. Let now k be chosen so that $\alpha+1+k \geqq \beta$. If $t>0$, then $\Phi(t, C^{(\beta)}) = \Psi(t, C^{(\beta)})$ by Lemma 5, and so, by Lemma 8(a), $\Psi(t, H^r C^{(\alpha+1+k)})$ exists for $r = 0, 1, 2, \ldots$ and is bounded as $t \to +0$ [6]). Hence, by Lemma 1—(iii), $\Psi(t, H^k C^{(\alpha+1)})$ is defined for $t>0$ and bounded as $t \to +0$, and so is also $\Psi(t, H^{k+1} C^{(\alpha+1)})$ in like manner. Thus

$$\begin{cases} \Psi(t, H^k C^{(\alpha+1)} - H^{k+1} C^{(\alpha+1)}) = O(1) & \text{as} \quad t \to +0, \\ H^k C^{(\alpha+1)} - H^{k+1} C^{(\alpha+1)} = o_L(1) & \text{as} \quad u \to \infty, \end{cases} \tag{16}$$

the latter being simply (15). Therefore, by Lemma 7(a) applied to

$$H^k C^{(\alpha+1)} - H^{k+1} C^{(\alpha+1)}$$

instead of s,

$$H^{k+1} C^{(\alpha+1)} - H^{k+2} C^{(\alpha+1)} = \text{both } o_L(1) \text{ and } O_R(1) \text{ as } u \to \infty,$$

i.e.

$$0 \leqq \varlimsup_{u\to\infty} u \frac{d}{du} H^{k+2} C^{(\alpha+1)} < \infty.$$

Consequently, by Lemma 6(a) applied to $H^{k+2} C^{(\alpha+1)}$ instead of s,

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^{k+2} C^{(\alpha+1)} = \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, H^{k+2} C^{(\alpha+1)}) < \infty.$$

Now using the second half of (16) and Lemma 4(a) with s replaced by $H^k C^{(\alpha+1)}$, we get $\operatorname{osc} H^{k+1} C^{(\alpha+1)} = \operatorname{osc} H^{k+2} C^{(\alpha+1)}$. By repetitions of this argument (if

[5]) Of course, in postulating the existence of $\Phi(t, C^{(\beta)})$ for $t>0$, we tacitly assume that $C^{(\beta)}(u)$ is a function of bounded variation in $(0, R)$ for every $R>0$, an assumption justified in the case $\beta>0$ by a suitable prior assumption regarding $s(u)$, such as that $s(u)$ in $(0, R)$ is absolutely continuous or of bounded variation according as $\beta<1$ or $\beta \geqq 1$.

[6]) To make Lemma 5 applicable, we may replace by zero $s(u)$, and hence $C^{(\beta)}(u)$ for any $\beta>0$, in some closed interval $(0, \delta)$, $\delta>0$. And, to make Lemma 8 applicable, we have to define $\Psi(t, C^{(\beta)})$ via $\Phi(t, C^{(\beta)})$, or else assume the boundedness of the former as $t \to \infty$ in addition to its boundedness as $t \to +0$.

necessary) and Lemma 8(a),

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^1 C^{(\alpha+1)} = \operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^2 C^{(\alpha+1)} = \cdots = \operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^{k+2} C^{(\alpha+1)}$$
$$= \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, H^{k+2} C^{(\alpha+1)}) \leqq \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, H^1 C^{(\alpha+1)}),$$

while

$$\operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, H^1 C^{(\alpha+1)}) \leqq \operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^1 C^{(\alpha+1)}$$

universaly, so that

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^1 C^{(\alpha+1)} = \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, H^1 C^{(\alpha+1)}). \tag{17}$$

Now (12a) gives

$$C^{(\alpha+1)}(u') - C^{(\alpha+1)}(u) = o_L(1) \log \frac{u'}{u} \quad \text{as} \quad u' > u \to \infty, \tag{12'a}$$

exactly as the case $\alpha = 0$ of (12a) gives the case $\alpha = 0$ of (12'a) in the proof of Lemma 4(a). Therefore Lemma 3(a) shows that

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} C^{(\alpha+1)} = \operatorname*{osc}_{u\to\infty} H^1 C^{(\alpha+1)} < \infty. \tag{18}$$

Considering (17) and (18) in conjunction with the relation

$$\operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, H^1 C^{(\alpha+1)}) \leqq \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, C^{(\alpha+1)}) \leqq \operatorname*{osc}_{u\to\infty} C^{(\alpha+1)},$$

of which the second half is universal and the first half a consequence of Lemma 8(a), we get finally

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} C^{(\alpha+1)} = \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, C^{(\alpha+1)}) = \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Phi(t, C^{(\alpha+1)}).$$

Corollary A. *If, in the hypotheses of Theorem* A, (12a) *is changed to*

$$\varliminf_{u\to\infty} \operatorname{bound}_{u\leq u'\leq u\lambda} \{C^{(\alpha)}(u') - C^{(\alpha)}(u)\} = o_L(\log\lambda) \quad \textit{as} \quad \lambda \to 1+0, \tag{19a}$$

without any other change, the conclusion will be that $C^{(\alpha)}(u)$ *is bounded as* $u \to \infty$ *and*

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty} C^{(\alpha)}(u) = \operatorname*{osc}_{t\to+0} \Psi(t, C^{(\alpha)}). \tag{20a}$$

Proof. Lemma 2(a) with s replaced by $C^{(\alpha)}$ shows that, in consequence of (19a), (12'a) now holds with α instead of $\alpha+1$ and

$$C^{(\alpha)} - H^1 C^{(\alpha)} = o_L(1) \quad \text{as} \quad u \to \infty.$$

Thus two crucial requirements of the proof of Theorem A, namely, (12'a) and the latter half of (16), are now satisfied with α instead of $\alpha+1$. The rest of the proof is exactly like the proof of Theorem A.

The following theorem and corollary are proved in the same way as the preceding theorem and corollary, with the difference that the proofs of the following two results make use of the subdivision (b) of each of Lemmas 2, 3, 4, 6, 7, 8 exactly where the proofs of the preceding two results make use of the subdivision (a) of each of the lemmas. Underlying all the proofs is a

principle of reduction which may be briefly stated as follows. A certain Tauberian condition for the method of summability $(\mathscr{A})$ is, in fact, such a condition for the method $(\mathscr{A}\mathscr{B}) \equiv (\mathscr{A}H^k)$ where k is any positive integer. In the proof of Theorem A our starting point is actually the method $(\mathscr{A}\mathscr{B}) \equiv (\Psi H^1 C^{(\alpha+1)} H^k)$ where k is chosen with reference to α, β and then reduced to 0 by successive stages of 1 each.

Theorem B. *Suppose that, in Theorem* A, (12a) *is changed to*

$$C^{(\alpha)}(u) - C^{(\alpha+1)}(u) = O_L(1) \quad as \quad u \to \infty, \tag{12b}$$

$\psi(u)$ *satisfies the condition* C(iv) *of* § 2 *in addition to* C(i), C(ii), C(iii) *of* § 2, *and* (13a) *is changed to*

$$\Phi(t, C^{(\beta)}) \to l \quad as \quad t \to +0. \tag{13b}$$

Then the conclusion (14a) *will be changed to*

$$C^{(\alpha+1)}(u) \to l \quad as \quad u \to \infty. \tag{14b}$$

Corollary B. *If, in Theorem* B, *hypothesis* (12b) *is changed to*

$$\varlimsup_{u\to\infty} \operatorname{bound}_{u \le u' \le u\lambda} \{C^{(\alpha)}(u') - C^{(\alpha)}(u)\} \ge -w(\lambda) \to 0 \quad as \quad \lambda \to 1+0, \tag{19b}$$

conclusion (14b) *of the theorem will be changed to*

$$C^{(\alpha)}(u) \to l \quad as \quad u \to \infty. \tag{20b}$$

Theorem A in two special cases, $\alpha=0$, $\beta=0$ and $\alpha=0$, $\beta=1$, is due to MINAKSHISUNDARAM ([6], § 5, Remarks after Lemma 3). Theorems A and B in the same two cases are treated together by RAJAGOPAL ([9], Theorems 1, 2) by methods more involved than those of this paper, explicitly in the case $\alpha=0$, $\beta=0$ and implicitly in the case $\alpha=0$, $\beta=1$. Theorem B in the case $\alpha \ge 0$, $\beta=0$ is proved by RAJAGOPAL ([10], Theorem A), again by a method different from that of this paper. Corollary A in the case $\alpha=0$, $\beta=0$ is due to RAMASWAMI ([13], Theorem I.2) while Corollary B in the same case is due in effect to KARAMATA ([5], Sätze A, B, C).

It may be added that, in our theorems and corollaries, the Cesàro transforms $C^{(\alpha)}$, $C^{(\alpha+1)}$, $C^{(\beta)}$ can be replaced by the Hölder transforms H^α, $H^{\alpha+1}$, H^β of non-negative non-integral orders, defined exactly as in (2), so that we have Tauberian theorems invariant for (ΦH^β) summability [or boundedness], $\beta \ge 0$, as for $(\Phi C^{(\beta)})$ summability or [boundedness].

5. Special cases and supplementary results. The following special choices for $\psi(u)$, $u>0$, in the order of their mention, make $\Phi(t, s)$ in turn the Laplace transform of s, the Stieltjes transform and the Lambert transform:

$$\psi(u) = e^{-u}; \quad \psi(u) = \frac{\varrho}{(1+u)^{\varrho+1}}, \quad \varrho > 0; \quad \psi(u) = -\frac{d}{du}\left(\frac{u}{e^u - 1}\right). \tag{21}$$

It is easy to verify that the first two choices of $\psi(u)$ in (21) satisfy conditions C(i), C(ii), C(iii), C(iv) of § 2 and that the last choice of $\psi(u)$ in (21) satisfies C(i), C(ii). That the last choice of $\psi(u)$ satisfies C(iv) is known ([2], p. 298),

and that the choice satisfies C (iii) can be shown by writing $\psi'(u)=(e^u-1)^{-3}f(u)$ and then proving that $f'(u)<0$ for $u>0$, $f(0)=0$.

When $\Phi(t,s)$ is either the Laplace transform or the Lambert transform, the integral defining it in (4) need only be Riemann-Stieltjes and (conditionally) convergent for $t>0$, as observed in footnotes 2 and 4, to preserve the essential validity of each of Lemmas 5, 8 and consequently that of our theorems and corollaries for $\beta=0$. The case in which s is a λ step-function (as usually defined) and $\alpha=0$, $\beta=0$ gives rise to the familiar Tauberian theorems for (A,λ) or Dirichlet-series summability [or boundedness] as well as the analogous theorems for (L,λ) or generalized-Lambert-series summability [or boundedness].

To make the last point clear, let us consider the sequence $\lambda\equiv\{\lambda_n\}$ subject, as usual, to the condition: $\lambda_0\geqq 0$, $\lambda_{n+1}>\lambda_n$, $\lambda_n\to\infty$, and define $s(u)$ as the step-function

$$s_\lambda(u)=a_0+a_1+\cdots+a_n\ (\lambda_n<u\leqq\lambda_{n+1}),\qquad s_\lambda(u)=0\quad(u\leqq\lambda_0).$$

Then the $C^{(\alpha)}$ transform of $s(u)$ in (1) becomes the Riesz transform $(C^{(\alpha)},\lambda)$ of Σa_n of order α and type λ while the Φ transform in (4) becomes the (Φ,λ) transform $\Sigma a_n\varphi(t\lambda_n)$. And the case $\alpha=0,\beta=0$ of Theorem B has the corollary: *if Σa_n satisfies the Tauberian condition*

$$a_0\lambda_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_n\lambda_n=O_L(\lambda_n)\quad as\quad n\to\infty,$$

in Kronecker form, then (Φ,λ) summability of Σa_n implies $(C^{(1)},\lambda)$ summability. From this result follows a Tauberian theorem for the convergence of series summable (Φ,λ), by an appeal to a Tauberian theorem for the convergence of series summable $(C^{(1)},\lambda)$, provided the Tauberian condition of the latter theorem implies the one in Kronecker form given above, as indeed it does when in the Schmidt form

$$\lim_{\delta\to+0}\varliminf_{n\to\infty}\min_{\lambda_n<\lambda_m<(1+\delta)\lambda_n}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m)\geqq 0,$$

$$\text{with, either } \lim\lambda_{n+1}/\lambda_n=1,\ \text{or } \varliminf a_n\geqq 0.$$

When $\Phi(t,s)$ is the Laplace transform of s, there are results supplementary to those given in § 4 of which the following is an example.

Theorem A_L. *If the Laplace transform of $s(u)$ exists as the Riemann-Stieltjes integral $\Phi(t,s)$ for $t>0$, then, given any $\gamma\geqq 0$, $\Psi(t,C^{(\gamma)})$ exists for $t>0$ as an absolutely convergent integral. And the hypothesis* (12a) *of Theorem* A, *together with the hypothesis* (13a) *modified to*

(13a$_L$) *for a* $\beta\geqq 0$, $\Psi(t,C^{(\beta)})=O(1)$ *as* $t\to+0$,

gives, in addition to the conclusion (14a) *of Theorem* A, *the further conclusion*

(14a$_L$) $$\operatorname*{osc}_{u\to\infty}C^{(\alpha+1)}(u)=\operatorname*{osc}_{t\to+0}\Phi(t,s).$$

Proof. First we note that, in virtue of the existence of $\Phi(t,s)$ for $t>0$, $s(u)=o(e^{t_0u})$ as $u\to\infty$ for every $t_0>0$ ([14], Chap. II, Theorem 2.2a) and so, when $\gamma=0$, $\Psi(t,C^{(\gamma)})$ converges absolutely for $t>0$ and is bounded as $t\to\infty$

([14], Chap. V, Theorem 1). The last assertion is true similarly when $\gamma>0$, since $u^{\gamma}C^{(\gamma)}(u)=o(u^{\gamma}e^{t_0 u})$ for every $t_0>0$. $(13a_L)$ now shows that the proof and the conclusion (14a) of Theorem A remain valid.

Next we use the known formula ([14], Chap. II, Theorem 2.3 a and §§ 8.1, 8.2),

$$\Phi(t,s)=\frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)}\int_0^{\infty}e^{-tu}u^{\alpha+1}C^{(\alpha+1)}(u)\,du-s(0),\qquad t>0,$$

and obtain

$$\operatorname*{osc}_{t\to\infty}\Phi(t,s)\leqq\operatorname*{osc}_{u\to\infty}C^{(\alpha+1)}(u)<\infty,$$

$C^{(\alpha+1)}(u)$ being bounded as $u\to\infty$. But, by (14a) and Lemma 8(a),

$$\operatorname*{osc}_{u\to\infty}C^{(\alpha+1)}(u)=\operatorname*{osc}_{t\to+0}\Psi(t,C^{(\alpha+1)})$$

$$\leqq\operatorname*{osc}_{t\to+0}\Psi(t,s)=\operatorname*{osc}_{t\to+0}\Phi(t,s).$$

$(14a_L)$ is now proved.

There is an analogue of Theorem A_L for a sequence, involving the Abel transform of the sequence and its Cesàro transforms of any real orders β, α, $\alpha+1$. As usual, the Abel transform of a sequence $s\equiv s_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ is defined by

$$(4^*)\qquad \Phi(x,s)=\sum_0^{\infty}s_n x^n,\qquad 0<x<1,$$

and the Cesàro transform of order $\alpha\geqq 0$ by

$$C^{*(\alpha)}(s)\equiv C_n^{*(\alpha)}=\frac{1}{e_n^{(\alpha)}}\sum_{r=0}^{\infty}e_{n-r}^{(\alpha-1)}s_r\quad\text{where}\quad e_n^{(\alpha)}=\binom{n+\alpha}{\alpha}\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

Then we know that ([2], p. 251)

(1^*-i) for $\alpha\geqq 0$, $C_n^{*(\alpha)}$ is the Hausdorff transform of s_n generated by

$$\frac{1}{e_n^{(\alpha)}}\qquad(n=0,1,2,\ldots),$$

and we introduce the definition that,

(1^*-ii) for $\alpha<0$, $C_n^{*(\alpha)}$ is the Hausdorff transform of s_n generated by

$$e_n^{(-\alpha)}\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

The method of Cesàro summability $(C^{*(\alpha)})$ extended to any real α, by definition (1^*-ii) taken along with (1^*-i), is the same as BORWEIN's[1]; and the matrix of the method, which may be denoted by $C^{*(\alpha)}$ in our notation, is uch that

$$(C^{*(\alpha)})\,(C^{*(-\alpha)})=1.$$

The analogue of Theorem A_L, already referred to, can now be stated as under.

Theorem A_L^*. *For a real sequence s_n $(n=0,1,2,\ldots)$, let there by a real number α such that*

$$C_n^{*(\alpha)}-C_n^{*(\alpha+1)}=o_L(1)\quad as\quad n\to\infty$$

where the expression on the left is defined according to (1*—i) *and* (1*—ii). *Also, let there be a real* β *such that* $\Phi(x, C^{*(\beta)})$ *defined by* (4*) *with* s_n *replaced by* $C_n^{*(\beta)}$, *exists for* $0<x<1$ *and*

$$\Phi(x, C^{*(\beta)}) = O(1) \quad as \quad x \to 1-0.$$

Then

$$\operatorname*{osc}_{n\to\infty} C_n^{*(\alpha+1)} = \operatorname*{osc}_{x\to 1-0} \Phi(x, s).$$

Theorem A_L^* can be proved in the same way as a similar analogue of Corollary A for sequences established by PARAMESWARAN in an unpublished paper communicated to the jubilee sessions of the Indian Mathematical Society.

A remark may be made in closing, on the two-sided counterpart of condition (5b), which is, in fact, the Schmidt condition S of slow oscillation of $s(u)$. By the case $\alpha=\beta=0$ of Corollary B, S is a Tauberian condition for the method of summability (Φ) whose kernel φ satisfies the conditions C(i)—C(iv) of § 2. And, as in a theorem due to PITT ([7], Chap. IV, Theorem 29), S is a Tauberian condition for a regular method of Hausdorff summability (h_χ) whose χ is such that

$$\int_0^1 t^w \, d\chi(t) \neq 0 \quad \text{for} \quad 0 \leqq \operatorname{Re} \omega \leqq \sigma_1.$$

Now, when $s(u)$ satisfies S, JAKIMOVSKI has shown ([4], Lemma 5.1) how a regular Hausdorff transform $h_\chi(u)$ of $s(u)$ also satisfies S. Consequently S is a Tauberian condition for all product methods (Φh_χ) where (Φ) and (h_χ) are restricted as above.

References

[1] BORWEIN, D.: Theorems on some methods of summability. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **9**, 310—316 (1958). — [2] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford, 1949. — [3] HAUSDORFF, F.: Die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte negativer Ordnung. Math. Z. **31**, 180—196 (1930). — [4] JAKIMOVSKI, A.: Some remarks on Tauberian theorems. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **9**, 114—131 (1958). — [5] KARAMATA, J.: Über die *O*-Inversionssätze der Limitierungsverfahren. Math. Z. **37**, 582—588 (1933). — [6] MINAKSHISUNDARAM, S.: On generalised Tauberian theorems. Math. Z. **45**, 495—506 (1939). — [7] PITT, H. R.: Tauberian theorems. Tata Institute of Fundamental Research Monographs on Mathematics and Physics, No. 2 (1958). — [8] RAJAGOPAL, C. T.: A note on 'positive' Tauberian theorems. J. London Math. Soc. **25**, 315—327 (1950). — [9] RAJAGOPAL, C. T.: A note on generalized Tauberian theorems. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 335—349 (1951). — [10] RAJAGOPAL, C. T.: Theorems on the product of summability methods with applications. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **18**, 89—105 (1954). — [11] RAJAGOPAL, C. T.: On Tauberian theorems for Abel-Cesàro summability. Proc. Glasgow Math. Assoc. **3**, 176—181 (1958). — [12] RAMANUJAN, M. S.: On products of summability methods. Math. Z. **69**, 423—428 (1958). — [13] RAMASWAMI, V.: The generalized Abel-Tauber theorem. Proc. London Math. Soc. (2) **41**, 408—417 (1936). — [14] WIDDER, D. V.: The Laplace transform. Princeton Mathematical Series, No. 6 (1946).

Ramanujan Institute of Mathematics, University of Madras (India)

(Eingegangen am 5. Oktober 1959)

WALTER, W.
Math. Zeitschr. 73, 268–279 (1960)

Über die Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$

III. Die nichtcharakteristische Anfangswertaufgabe*)

Von

WOLFGANG WALTER

§ 10. Vorbereitungen

Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen. Gegeben sei ein Rechteck $R: 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b$, und eine Kurve C

$$C: \quad x = \xi(s), \quad y = \eta(s) \qquad (0 \leqq s \leqq s_0),$$

welche (um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben) monoton fallend vom Punkt $(0, b)$ zum Punkt $(a, 0)$ läuft. Die Funktionen $\xi(s), \eta(s)$ seien stetig differenzierbar, und es sei $\xi'(s) > 0, \eta'(s) < 0$; letzteres bedeutet, daß die Kurve C keine Tangente parallel zu einer der Koordinatenachsen besitzt. Wir betrachten bei den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssätzen immer nur den oberhalb der Kurve C liegenden Teil D von R, das ist also das von den Geraden $x = a$, $y = b$ und der Kurve C begrenzte krummlinige, abgeschlossene Dreieck. Weiter werde für die Menge der nicht auf C liegenden Punkte von D die Bezeichnung D_0 eingeführt, $D_0 = D - C$. Ist (x, y) ein Punkt aus D_0, so ziehen wir die beiden Parallelen zu den Koordinatenachsen durch (x, y). Diese schneiden die Kurve C in zwei Punkten $(\bar{x}, y)$, $(x, \bar{y})$ oder genauer $\big(\bar{x}(y), y\big)$, $\big(x, \bar{y}(x)\big)$; anders gesagt, durch

$$x = \bar{x}(y) \quad \text{und} \quad y = \bar{y}(x)$$

seien zwei explizite Darstellungen der Kurve C gegeben. Das von diesen beiden Parallelen und der Kurve C berandete krummlinige Dreieck werde mit $\varrho(x, y)$, sein Inhalt mit $r(x, y)$, die Länge seiner beiden „Katheten" mit X und Y bezeichnet[1]). Es ist hiernach

$$X = X(x, y) = x - \bar{x}(y), \qquad Y = Y(x, y) = y - \bar{y}(x)$$

und

$$r(x, y) = \iint\limits_{\varrho(x, y)} ds\, dt = \int\limits_{\bar{x}}^{x} Y(s, y)\, ds = \int\limits_{\bar{y}}^{y} X(x, t)\, dt.$$

*) Diese Arbeit wurde teilweise unterstützt von der United States Air Force [Air Force Office of Scientific Research-Contract AF 49(638)-228]. Sie wurde von der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Technischen Hochschule Karlsruhe als Habilitationsschrift angenommen. Die beiden ersten Teile sind in Band 71 dieser Zeitschrift erschienen (S. 308–324 und 436–453).

[1]) Diese Bezeichnungsweise wurde gewählt, weil die früheren Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen dann ohne wesentliche Änderungen gültig bleiben, wenn man in ihnen die Größen x und y durch X und Y ersetzt.

Das nichtcharakteristische Anfangswertproblem besteht darin, eine Lösung der Differentialgleichung

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

zu finden, die auf C vorgeschriebene Werte u, u_x, u_y annimmt. Genau formuliert lautet die Aufgabe folgendermaßen. Gegeben seien eine in $[0, s_0]$ stetig differenzierbare Funktion $u(s)$ und zwei in $[0, s_0]$ stetige Funktionen $v(s)$, $w(s)$, welche der „Streifenbedingung" $u' = \xi' v + \eta' w$ genügen mögen. Gesucht ist eine Lösung $u(x, y)$ der Gl. (1) aus der Klasse D^* mit der Eigenschaft, daß $u(x, y)$ bzw. $u_x(x, y)$ bzw. $u_y(x, y)$ für $(x, y) = (\xi(s), \eta(s))$ mit $u(s)$ bzw. $v(s)$ bzw. $w(s)$ übereinstimmen. Dabei ist D^* definiert als die Klasse aller Funktionen $v(x, y)$, für die v, v_x, v_y und v_{xy} in D existieren und stetig sind.

Äquivalent damit ist die Aufgabe, eine Lösung (u, v, w) des Systems von Integralgleichungen

$$\left|\begin{aligned} u(x, y) &= \sigma(x) + \tau(y) + \iint\limits_{\varphi(x, y)} f(s, t, u, v, w)\, ds\, dt \\ v(x, y) &= \sigma'(x) + \int\limits_{\bar{y}}^{y} f(x, t, u, v, w)\, dt \\ w(x, y) &= \tau'(y) + \int\limits_{\bar{x}}^{x} f(s, y, u, v, w)\, ds \end{aligned}\right. \tag{2}$$

zu finden (vgl. etwa KAMKE [7, S. 405 f.]). Die Funktionen $\sigma(x)$ und $\tau(y)$ lassen sich aus den Gleichungen $\sigma'(\xi(s)) = v(s)$, $\tau'(\eta(s)) = w(s)$ im wesentlichen eindeutig bestimmen[2]).

Im folgenden wird immer angenommen, daß $f(x, y, u, v, w)$ in dem durch

$$(x, y) \in D, \quad -\infty < u, v, w < \infty$$

abgegrenzten Bereich *stetig* ist. Wir bemerken noch, daß nach den obigen Annahmen über die Kurve C zwei positive Konstanten k_1, K_1 mit der Eigenschaft

$$0 < k_1 \leqq \left|\frac{d\bar{x}(y)}{dy}\right| \leqq K_1, \quad 0 < k_1 \leqq \left|\frac{d\bar{y}(x)}{dx}\right| \leqq K_1 \tag{3}$$

existieren.

Alle Ergebnisse der folgenden Paragraphen lassen sich durch einfache Koordinatentransformationen auch auf den unterhalb der Kurve C liegenden Teil von R sowie auf den Fall, daß die Kurve C monoton wachsend vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt (a, b) läuft, übertragen.

§ 11. Eindeutigkeitssätze

In diesem Paragraphen wollen wir die Ergebnisse von Teil I auf das jetzt zu behandelnde nichtcharakteristische Anfangswertproblem übertragen. Man muß sich dabei zuerst darüber Klarheit verschaffen, welche Größen etwa bei dem Eindeutigkeitssatz von NAGUMO (Satz I.5) an die Stelle von x und y zu

[2]) Das soll heißen, daß die einzige Willkür darin besteht, statt σ, τ die Funktionen $\sigma + c, \tau - c$ (c konstant) zu wählen.

treten haben. Es liegt natürlich nahe, x durch X und y durch Y zu ersetzen; die Eindeutigkeitsbedingung würde dann lauten

$$(4)\qquad \begin{cases} |f(x,y,u,v,w) - f(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{w})| \\ \quad \leqq \alpha \dfrac{|u-\bar{u}|}{XY} + \beta \dfrac{|v-\bar{v}|}{Y} + \gamma \dfrac{|w-\bar{w}|}{X} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=1). \end{cases}$$

In der Tat läßt sich dann ein Eindeutigkeitsbeweis ähnlich dem von Satz I.5 durchführen. Eine genaue Analyse des Beweises zeigt jedoch, daß man die Voraussetzungen bezüglich der Variablen u sogar noch abschwächen kann. Es gilt nämlich der

SATZ 1 (*Eindeutigkeitssatz nach* NAGUMO). *Die Funktion $f(x,y,u,v,w)$ sei stetig und genüge einer Abschätzung*

$$(5)\qquad |f(x,y,u,v,w) - f(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{w})| \leqq \alpha \frac{|u-\bar{u}|}{r(x,y)} + \beta \frac{|v-\bar{v}|}{Y(x,y)} + \gamma \frac{|w-\bar{w}|}{X(x,y)}$$

für $(x,y) \in D_0$, $-\infty < u, \bar{u}, \ldots, \bar{w} < \infty$, wobei $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \gamma \geqq 0$ und $\alpha+\beta+\gamma=1$ ist. Dann besitzt die nichtcharakteristische Anfangswertaufgabe für die Gl. (1) *höchstens eine Lösung.*

Der Beweis von Satz I.5 kann mit geringfügigen Änderungen übernommen werden. In gewisser Beziehung ist er sogar einfacher, weil man hier schon von der Aufgabenstellung her weiß, daß, wenn u und $\bar{u}$ zwei Lösungen sind, $u=\bar{u}$, $u_x=\bar{u}_x$ und $u_y=\bar{u}_y$ auf der Kurve C ist. Daraus und aus (2) erhält man ohne Schwierigkeit eine erste Abschätzung (mit den Bezeichnungen von Satz I.5)

$$(6)\qquad \begin{cases} \delta u(x,y) = r\, \psi_0(X)\, \psi_0(Y) \\ \delta u_x(x,y) = Y\, \psi_0(X)\, \psi_0(Y) \\ \delta u_y(x,y) = X\, \psi_0(X)\, \psi_0(Y), \end{cases}$$

die der Abschätzung (I.21) entspricht. Die Behauptung lautet jetzt statt (I.22)

$$(7)\qquad \begin{cases} \delta u(x,y) = r \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \psi_\nu(X)\, \psi_{n-\nu}(Y) \quad \text{mit} \quad \alpha_\nu \geqq 0,\ \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = 1 \\ \delta u_x(x,y) = Y \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \psi_\nu(X)\, \psi_{n-\nu}(Y) \quad \text{mit} \quad \beta_\nu \geqq 0,\ \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu = 1 \\ \delta u_y(x,y) = X \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu \psi_\nu(X)\, \psi_{n-\nu}(Y) \quad \text{mit} \quad \gamma_\nu \geqq 0,\ \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu = 1. \end{cases}$$

Unter Benutzung der Abschätzungen

$$\begin{aligned} \iint_{\varrho(x,y)} \psi_\nu\big(X(s,t)\big)\, \psi_{n-\nu}\big(Y(s,t)\big)\, ds\, dt &\leqq \psi_{n-\nu}\big(Y(x,y)\big) \int_{\bar{y}}^{y} \int_{0}^{X(x,t)} \psi_\nu(z)\, dz\, dt \\ &\leqq \psi_{n-\nu}\big(Y(x,y)\big) \int_{\bar{y}}^{y} X(x,t)\, \psi_{\nu+1}\big(X(x,t)\big)\, dt \\ &\leqq \psi_{n-\nu}\big(Y(x,y)\big)\, \psi_{\nu+1}\big(X(x,y)\big) \int_{\bar{y}}^{y} X(x,t)\, dt \\ &= r(x,y)\, \psi_{\nu+1}\big(X(x,y)\big)\, \psi_{n-\nu}\big(Y(x,y)\big) \end{aligned}$$

und

$$\int_{\bar{x}}^{x} \psi_\nu\big(X(s,y)\big)\,\psi_{n-\nu}\big(Y(s,y)\big)\,ds \leqq \psi_{n-\nu}\big(Y(x,y)\big)\int_{\bar{x}}^{x}\psi_\nu\big(X(s,y)\big)\,ds$$
$$= \psi_{n-\nu}\big(Y(x,y)\big)\int_{0}^{X(x,y)}\psi_\nu(z)\,dz \leqq X(x,y)\,\psi_{\nu+1}\big(X(x,y)\big)\,\psi_{n-\nu}\big(Y(x,y)\big)$$

sowie einer ähnlichen Abschätzung in der y-Richtung läßt sich der Induktionsbeweis wie bei Satz I.5 durchführen. Die Einzelheiten des Beweises seien dem Leser überlassen.

Satz 2. *Die von w unabhängige Funktion $f=f(x, y, u, v)$ sei für $(x, y)\in D$, $-\infty<u, v<\infty$ stetig. Es sei $c=\mathrm{Max}[r(a, b), b]$ und $g(x, z)$ eine Funktion aus der Klasse $G'(0, c)$, welche der Bedingung (ϑ) von § 3 genügt. Dann besitzt die nichtcharakteristische Anfangswertaufgabe für die Gleichung*

$$u_{xy}=f(x, y, u, u_x) \tag{8}$$

höchstens eine Lösung, wenn f für $(x, y)\in D_0$, $-\infty<u, \bar{u}, v, \bar{v}<\infty$ der Abschätzung

$$|f(x, y, u, v)-f(x, y, \bar{u}, \bar{v})| \leqq \alpha\, g\big(r(x, y), |u-\bar{u}|\big)+\beta\, g\big(Y(x, y), |v-\bar{v}|\big) \tag{9}$$

genügt ($\alpha\geqq 0$, $\beta\geqq 0$, $\alpha+\beta=1$)[3].

Satz 3. *Die Funktion $f=f(x, y, u, v, w)$ genüge der Ungleichung*

$$\begin{cases} |f(x, y, u, v, w)-f(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})| \\ \qquad \leqq g\big(X(x, y)+Y(x, y), |u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|+|w-\bar{w}|\big) \end{cases} \tag{10}$$

für $(x, y)\in D_0$, $-\infty<u, \ldots, \bar{w}<\infty$, wobei neben $g(x, z)$ auch noch $g_1(x, z)=(2+a)\,g(x, z)\in G'(0, a+b)$ sei. Dann existiert höchstens eine Lösung der nichtcharakteristischen Anfangswertaufgabe für die Gl. (1).

Diese beiden Sätze entsprechen Satz I.6 und Satz I.7. Bei der folgenden Beweisskizze zu Satz 2 bedienen wir uns der im Beweis von Satz I.6 eingeführten Bezeichnungen und beschränken uns auf den Fall $a\leqq 1$. Die Behauptung (I.27) lautet jetzt

$$\begin{cases} \delta u(x, y) \leqq r(x, y)\,\psi_n\big(Y(x, y)\big), \\ \delta u_x(x, y) \leqq Y(x, y)\,\psi_n\big(Y(x, y)\big)=\varphi_n\big(Y(x, y)\big); \end{cases} \tag{11}$$

für $n=0$ folgt sie aus (6). Ist die zweite dieser Ungleichungen für ein festes n bereits bewiesen, so ergibt sich mit Hilfe von $r(x, t)<a\,Y(x, t)\leqq Y(x, t)$ und (ϑ)

$$\delta u_x(x, y) \leqq \int_{\bar{y}}^{y}\{\alpha\, g[r(x, t), r(x, t)\,\psi_n(Y(x, t))]+\beta\, g[Y(x, t), \varphi_n(Y(x, t))]\}\,dt$$
$$\leqq \int_{\bar{y}}^{y} g[Y(x, t), \varphi_n(Y(x, t))]\,dt=\int_{0}^{Y(x, y)} g(s, \varphi_n(s))\,ds=\varphi_{n+1}(Y(x, y)),$$

[3] Ein entsprechender Eindeutigkeitssatz gilt, wenn $f=f(x, y, u, w)$ von v unabhängig ist.

und eine ähnliche Abschätzung läßt sich für $\delta u(x, y)$ durchführen. Hieraus folgt die Behauptung des Satzes genau wie bei Satz I.6.

Bei Satz 3 tritt eine kleine Schwierigkeit auf. Zunächst kann man wie bei Satz I.7 vorgehen; statt (I.30) haben wir dann

$$D(x, y) \leqq \varphi_n\big(X(x, y) + Y(x, y)\big). \tag{12}$$

Diese Ungleichung ist, wie man leicht sieht, für $n = 0$ richtig. Beim Schluß von n auf $n+1$ gehen wir aus von der Ungleichung

$$\begin{aligned}\delta u_x(x, y) &\leqq \int_{\bar{y}}^{y} g\big(X(x, t) + t - \bar{y},\, \varphi_n(X(x, t) + t - \bar{y})\big)\, dt \\ &= \int_{0}^{Y(x,y)} g\big(X(x, \bar{y} + t) + t,\, \varphi_n(X(x, \bar{y} + t) + t)\big)\, dt.\end{aligned}$$

Ist $p(t)$ eine integrierbare nichtnegative Funktion, $h(t)$ eine monoton wachsende nichtnegative Funktion, so gilt allgemein die Ungleichung

$$\int_0^c p\big(t + h(t)\big)\, dt \leqq \int_0^{c+h(c)} p(t)\, dt, \qquad (c > 0)$$

wie man sich an Hand der Summendefinition des Integrals leicht überlegen kann. Wählen wir in dieser Ungleichung $p(t) = g\big(t, \varphi_n(t)\big)$ und $h(t) = X(x, \bar{y} + t)$, so erhalten wir

$$\delta u_x(x, y) \leqq \int_0^d g\big(t, \varphi_n(t)\big)\, dt \quad \text{mit} \quad d = X(x, y) + Y(x, y).$$

Dieselbe Ungleichung gilt auch für $\delta u_y(x, y)$, während

$$\begin{aligned}\delta u(x, y) &\leqq \iint_{\varrho(x,y)} g\big(X + Y, \varphi_n(X + Y)\big)\, ds\, dt \\ &\leqq X(x, y) \sup\left\{ \int_{\bar{y}(s)}^{y} g\big(X + Y, \varphi_n(X + Y)\big)\, dt \,\middle|\, \bar{x}(y) \leqq s \leqq x \right\} \\ &\leqq X(x, y) \int_0^d g\big(t, \varphi_n(t)\big)\, dt,\end{aligned}$$

also schließlich

$$D(x, y) \leqq (2 + a) \int_0^d g\big(t, \varphi_n(t)\big)\, dt = \varphi_{n+1}(X + Y)$$

ist. Damit ist auch Satz 3 bewiesen.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit einem Beispiel, das dem im Anschluß an Satz I.6 angegebenen Beispiel $u = (xy)^{1+\varepsilon}$ analog ist. Es soll zeigen, *daß Satz 1 ein „bester" Satz ist, d. h. daß in der Bedingung* $\alpha + \beta + \gamma = 1$ *von Satz 1 die Konstante* 1 *nicht durch eine größere Konstante ersetzt werden kann.* Es seien also R und C gegeben, und wir betrachten die Funktion $u(x, y) = [r(x, y)]^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$. Wegen

$$\begin{aligned} u &= r^{1+\varepsilon}, & u_y &= (1 + \varepsilon) X r^{\varepsilon}, \\ u_x &= (1 + \varepsilon) Y r^{\varepsilon}, & u_{xy} &= (1 + \varepsilon) r^{\varepsilon} + \varepsilon(1 + \varepsilon) X Y r^{\varepsilon - 1} \end{aligned}$$

genügt u der Differentialgleichung

$$u_{xy}=\bar{\alpha}\frac{u}{r}+\varepsilon(1+\varepsilon)\frac{XYu}{r^2}+\bar{\beta}\frac{u_x}{Y}+\bar{\gamma}\frac{u_y}{X}, \tag{13}$$

wenn $\bar{\alpha}+(\bar{\beta}+\bar{\gamma})(1+\varepsilon)=1+\varepsilon$ ist. Es gibt wegen der Voraussetzung (3) über C eine Konstante N, so daß $X(x, y)\,Y(x, y)/r(x, y)\leqq N$ für $(x, y)\in D_0$ ist. Die rechte Seite der Gl. (13) genügt also einer Abschätzung (5), sobald

$$0\leqq\bar{\alpha}\leqq\alpha-\varepsilon(1+\varepsilon)N,\quad 0\leqq\bar{\beta}\leqq\beta,\quad 0\leqq\bar{\gamma}\leqq\gamma \tag{14}$$

ist. Sind nun drei Zahlen $\alpha>0$, $\beta\geqq 0$, $\gamma\geqq 0$, deren Summe $\alpha+\beta+\gamma>1$ ist, gegeben, so wähle man $\varepsilon>0$ so klein, daß auch noch

$$\frac{\alpha-N\varepsilon(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon}+\beta+\gamma>1$$

und schließlich $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ so, daß (14) und $\bar{\alpha}/(1+\varepsilon)+\bar{\beta}+\bar{\gamma}=1$ gilt. Die Funktion $u=r^{1+\varepsilon}$ ist dann eine auf C zusammen mit ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindende Lösung der Gl. (13), ebenso die Funktion $u(x, y)\equiv 0$. Ähnlich wie beim Beispiel von Satz I.5 kann man die rechte Seite von (13) so abändern, daß eine stetige, beschränkte Funktion entsteht. Damit haben wir das gewünschte, mehr als eine Lösung zulassende Anfangswertproblem erhalten.

§ 12. Der allgemeine Existenzsatz

Auch die Frage nach der Existenz einer Lösung kann beim nichtcharakteristischen Problem weitgehend in derselben Weise wie beim charakteristischen, in Teil II behandelten Problem beantwortet werden.

Satz 4. *Die Funktion $f(x, y, u, v, w)$ sei stetig und beschränkt für $(x, y)\in D$, $-\infty<u, v, w<\infty$. Sie gestatte ferner die Abschätzung*

$$\begin{cases}|f(x, y, u, v, w)-f(x, y, u, \bar{v}, \bar{w})|\\ \qquad\leqq g_1\big(Y(x, y), |v-\bar{v}|\big)+g_2\big(X(x, y), |w-\bar{w}|\big)\end{cases} \tag{15}$$

für $(x, y)\in D_0$, $-\infty<u, v, \bar{v}, w, \bar{w}<\infty$; über die Funktionen $g_1(x, z)$ und $g_2(x, z)$ mögen dieselben Voraussetzungen wie in Satz II.1 gelten. Dann besitzt die nichtcharakteristische Anfangswertaufgabe für die Differentialgleichung (1) *mindestens eine Lösung.*

Wir schließen uns im Beweis den Betrachtungen und Bezeichnungen von § 7 an. Zunächst werden Näherungsfunktionen $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha$ konstruiert, welche für $(x, y)\in D$ dem System

$$\begin{cases}u_\alpha(x, y)=\sigma(x)+\tau(y)+\\ \qquad+\iint\limits_{\varrho(x, y)} f\big(s, t, u_\alpha(s-\alpha, t), v_\alpha(s, t-\alpha), w_\alpha(s-\alpha, t)\big)\,ds\,dt\\ v_\alpha(x, y)=\sigma'(x)+\int\limits_{\bar{y}}^{y} f\big(x, t, u_\alpha(x-\alpha, t), v_\alpha(x, t-\alpha), w_\alpha(x-\alpha, t)\big)\,dt\\ w_\alpha(x, y)=\tau'(y)+\int\limits_{\bar{x}}^{x} f\big(s, y, u_\alpha(s-\alpha, y), v_\alpha(s, y-\alpha), w_\alpha(s-\alpha, y)\big)\,ds\end{cases} \tag{16}$$

genügen. Statt (II.13) definieren wir

$$(17)\qquad \begin{cases} u_\alpha(x,y)=\sigma(x)+\tau(y) & \text{für} \quad (x,y)\in R-D_0 \\ u_\alpha(x,y)=\sigma(0)+\tau(y) & \text{für} \quad x\leqq 0,\ 0\leqq y\leqq b \\ v_\alpha(x,y)=\sigma'(x) & \text{für} \quad 0\leqq x\leqq a,\ y\leqq\bar{y}(x) \\ w_\alpha(x,y)=\tau'(y) & \text{für} \quad x\leqq\bar{x}(y),\ 0\leqq y\leqq b. \end{cases}$$

Diese Näherungsfunktionen erhält man, ähnlich wie in § 7, zunächst für die Punkte $(x, y)\in D$ mit $X<\alpha$, $Y<\alpha$, dann für $X<2\alpha$, $Y<\alpha$ usw.

Wenn die Näherungsfunktionen gleichgradig stetig sind, so erhält man aus ihnen auf demselben Wege wie in § 7 eine Lösung der Integralgleichung (2). Hat die Funktion $d(t)$ dieselben Eigenschaften wie in § 7, so gilt die Abschätzung (II.18) ungeändert. Zu zeigen bleibt also, daß es zu jedem Punkt $(x, y)\in D$ und für jedes $\varepsilon>0$ ein $\delta=\delta(\varepsilon, x, y)$ gibt, so daß

$$(18)\qquad |w_\alpha(x,y+k)-w_\alpha(x,y)|<\varepsilon \quad \text{für} \quad |k|<\delta \quad \text{und alle } \alpha>0$$

und

$$(18')\qquad |v_\alpha(x+h,y)-v_\alpha(x,y)|<\varepsilon \quad \text{für} \quad |h|<\delta \quad \text{und alle } \alpha>0$$

ist. Wir beschäftigen uns wieder nur mit der ersten dieser Ungleichungen. Es ist leicht zu sehen, daß die Behauptung für $(x, y)\in C$ richtig ist, da alle w_α längs C übereinstimmen. Ferner kann man sich in (18) auf $k>0$ beschränken, wenn man zugleich zeigt, daß die Abschätzung (18) gleichmäßig in y gilt (sie wird sogar gleichmäßig in x und y sein). In Abänderung von (II.20) definieren wir hier

$$(19)\qquad W_\alpha(x,y,k)=\begin{cases} 0 & \text{für } x\leqq\bar{x}(y) \\ w_\alpha(x,y+k)-w_\alpha(x,y)+\tau'(y)-w_\alpha\big(\bar{x}(y),y+k\big) & \\ & \text{für } \bar{x}(y)\leqq x\leqq a; \end{cases}$$

dabei ist $0\leqq y<y+k\leqq b$ vorausgesetzt. Nach (16), (II.18) und (3) ist für alle $x\leqq a$

$$(20)\qquad \begin{cases} |W_\alpha(x,y,k)-w_\alpha(x,y+k)+w_\alpha(x,y)| \\ \qquad\leqq|\tau'(y)-\tau'(y+k)|+\int\limits_{\bar{x}(y+k)}^{\bar{x}(y)}|f|\,ds\leqq d(k)+MK_1k. \end{cases}$$

Demnach genügt es offenbar zu zeigen, daß $W_\alpha(x, y, k)$ gleichmäßig in x, y und α gegen Null konvergiert (für $k\to 0$). Statt (II.21) haben wir jetzt die Ungleichung

$$(21)\qquad \begin{cases} |W_\alpha(x,y,k)| \\ \quad\leqq\int\limits_{\bar{x}(y)}^{x}|f\big(s,y+k,u_\alpha(s-\alpha,y+k),v_\alpha(s,y+k-\alpha),w_\alpha(s-\alpha,y+k)\big)- \\ \qquad -f\big(s,y,u_\alpha(s-\alpha,y),v_\alpha(s,y-\alpha),w_\alpha(s-\alpha,y)\big)|\,ds \text{ für } (x,y)\in D_0. \end{cases}$$

Der Integrand ist identisch mit dem Integranden von (II.21), und er wird genau wie dort in zwei Differenzen zerlegt, von denen die erste leicht abzuschätzen ist. Bei der Abschätzung der zweiten Differenz — f stimmt wieder in den vier ersten Argumenten überein — ergibt sich eine kleine Änderung:

$$\begin{aligned}
&|f(\ldots, w_\alpha(s-\alpha, y+k)) - f(\ldots, w_\alpha(s-\alpha, y))| \\
&\quad \leqq |f(\ldots, w_\alpha(s-\alpha, y+k)) - f(\ldots, W_\alpha(s-\alpha, y, k) + w_\alpha(s-\alpha, y))| \\
&\quad + |f(\ldots, W_\alpha(s-\alpha, y, k) + w_\alpha(s-\alpha, y)) - f(\ldots, w_\alpha(s-\alpha, y))| \\
&\quad \leqq d[d(k) + M K_1 k] + g_2(X(s, y), |W_\alpha(s-\alpha, y, k)|).
\end{aligned}$$

Damit sind wir auch im vorliegenden Fall bei einer Ungleichung ähnlich (II.22) oder, wenn wir $\eta(s) = \eta(s; \alpha, \delta) = \sup\{|W_\alpha(\bar{x}(y)+s, y, k)|;\ 0<k<\delta\}$ setzen, bei der Ungleichung (II.23) angelangt. Der Rest des Beweises kann aus § 7 übernommen werden.

Es ist nicht schwierig, nichtcharakteristische Anfangswertaufgaben anzugeben, die unlösbar sind. Es seien R und C gegeben, und die Funktion

$$f(x, y, u, v, w) = h(x, y, w)$$

genüge der Monotoniebedingung

$$h(\bar{x}(y) + s, y, w) < h(\bar{x}(y_1) + s, y_1, w) \qquad \text{für } y < y_1.$$

Ferner habe das Anfangswertproblem für die *gewöhnliche* Differentialgleichung

$$w'(s) = h(\bar{x}(\eta) + s, \eta, w), \qquad w(0) = \alpha$$

für ein gewisses α und ein η mit $0<\eta<b$ mehr als eine Lösung. Dann ist jedes nichtcharakteristische Anfangswertproblem für die Gl. (II.36) unlösbar, bei dem u_y längs C so vorgeschrieben wird, daß $u_y(\bar{x}(\eta), \eta) = \alpha$ und $u_y(\bar{x}(y), y)$ eine monoton wachsende Funktion von y ist. Man zeigt dies durch eine Überlegung, die der am Schluß von § 7 durchgeführten analog ist.

§ 13. Verallgemeinerungen und Ergänzungen verschiedener Art

Betrachten wir zunächst das Picardsche Iterationsverfahren zur Lösung der nichtcharakteristischen Anfangswertaufgabe. Die Folge der sukzessiven Approximationen

$$u_0 = \sigma(x) + \tau(y), \qquad v_0 = \sigma'(x), \qquad w_0 = \tau'(y), \tag{22}$$

$$\begin{cases}
u_{n+1}(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) + \iint\limits_{\varphi(x,y)} f(s, t, u_n, v_n, w_n)\, ds\, dt \\
v_{n+1}(x, y) = \sigma'(x) + \int\limits_{\hat{y}}^{y} f(x, t, u_n, v_n, w_n)\, dt \\
w_{n+1}(x, y) = \tau'(y) + \int\limits_{\bar{x}}^{x} f(s, y, u_n, v_n, w_n)\, ds
\end{cases} \tag{23}$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Lösung von (2), falls f einer Lipschitz-Bedingung in u, v, w genügt (Kamke [7, S. 406]). Wir wollen hier die Fragestellung von § 9 wieder aufnehmen. Es gilt der folgende, mit Satz II.3 fast wörtlich übereinstimmende

SATZ 5. *Das nichtcharakteristische Anfangswertproblem für die Gl.* (1) *besitze eine Lösung* $u(x, y)$, *und die Funktion* $f(x, y, u, v, w)$ *genüge einer der Voraussetzungen von Satz 1 bis Satz 3. Dann konvergieren die durch sukzessive Approximation gewonnenen Funktionenfolgen* u_n, v_n *und* w_n *gleichmäßig in* D *gegen* u *bzw.* u_x *bzw.* u_y.

Auf den Beweis, der dem von Satz II.3 weitgehend entspricht, soll nicht näher eingegangen werden. Es sei lediglich darauf hingewiesen, daß man immer mit der ersten Approximation (22) auskommt — im Gegensatz zu § 9, wo (II.37) in manchen Fällen durch die bessere Approximation (II.41) ersetzt werden mußte.

Auch die in § 9 gemachten Bemerkungen über einen Existenzbeweis durch sukzessive Approximation lassen sich ohne Schwierigkeiten und ohne wesentliche Änderungen übertragen.

Schließlich sei erwähnt, daß alle Resultate von Teil III auf Systeme von Differentialgleichungen in dem in § 5 näher erläuterten Sinne ausgedehnt werden können.

Wir kommen nochmals auf die in § 5 angeschnittene Frage zurück, ob es möglich ist, die Eindeutigkeitssätze in der Richtung zu verallgemeinern, daß man nur *lokale Abschätzungen* von f fordert. Die Frage blieb damals offen; wir wollen im folgenden zeigen, daß sie im positiven Sinne beantwortet werden kann. Wesentlich für den Beweis ist eine Verallgemeinerung der Sätze von § 11.

SATZ 6 *(Allgemeiner Eindeutigkeitssatz). Die Funktion* $f(x, y, u, v, w)$ *sei für* $(x, y) \in R$, $-\infty < u, v, w < \infty$ *stetig. Ferner existiere zu jedem Punkt* $(\xi, \eta) \in R$ *eine Umgebung* $N = N(\xi, \eta)$ *mit der Eigenschaft, daß mindestens eine der folgenden Abschätzungen*

$$(24)\quad |f(x,y,u,v,w) - f(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{w})| \leqq \alpha \frac{|u-\bar{u}|}{|x-\xi|\,|y-\eta|} + \beta \frac{|v-\bar{v}|}{|y-\eta|} + \gamma \frac{|w-\bar{w}|}{|x-\xi|}$$

$$(25)\quad \begin{cases} |f(x,y,u,v,w) - f(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{w})| \\ \qquad \leqq \alpha\, g\big(|x-\xi|\cdot|y-\eta|, |u-\bar{u}|\big) + \beta\, g\big(|y-\eta|, |v-\bar{v}|\big), \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} |f(x,y,u,v,w) - f(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{w})| \\ \qquad \leqq \alpha\, g\big(|x-\xi|\,|y-\eta|, |u-\bar{u}|\big) + \gamma\, g\big(|x-\xi|, |w-\bar{w}|\big), \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} |f(x,y,u,v,w) - f(x,y,\bar{u},\bar{v},\bar{w})| \\ \qquad \leqq g\big(|x-\xi| + |y-\eta|, |u-\bar{u}| + |v-\bar{v}| + |w-\bar{w}|\big) \end{cases}$$

gültig ist[4]*, wenn der Punkt* (x, y) *in* R *und in* N *gelegen und* $-\infty < u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w} < \infty$ *ist.*

Dabei ist vorausgesetzt

in (24): $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\gamma \geqq 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$;

in (25): $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$; $g(x, z) \in G'(0, \delta)$ *für ein* $\delta > 0$; $g(x, z)$ *genügt der Voraussetzung* (ϑ);

[4]) Es entspricht Formel (24) dem Satz 1.5, Formel (25) und (26) dem Satz 1.6 und Zusatz, Formel (27) dem Satz 1.7.

in (26): $\alpha \geqq 0$, $\gamma \geqq 0$, $\alpha + \gamma = 1$; *sonst wie in* (25);

in (27): $g(x, z) \in G'(0, \delta)$ *für ein* $\delta > 0$.

Außerdem habe $g(x, z)$ *in* (25) *bis* (27) *die folgende Monotonieeigenschaft*

(ι) $g(x, z) \geqq g(\bar{x}, z)$ *für* $x \leqq \bar{x}$ *und alle* $z \geqq 0$.

Dann besitzt jedes charakteristische Anfangswertproblem für das Rechteck R *und jedes nichtcharakteristische Anfangswertproblem für eine beliebige, in* R *gelegene Kurve* C *höchstens eine Lösung.*

Wegen der Voraussetzung (ι) enthält dieser Satz die früheren Eindeutigkeitssätze nicht als Spezialfälle. Diese Monotoniebedingung stellt übrigens keine schwerwiegende Einschränkung der Allgemeinheit dar, auch nicht zusammen mit (ϑ). Setzt man etwa

$$g(x, z) = \left(\frac{1}{x} + K(x)\right) z, \qquad K(x) \text{ summierbar über } (0, \delta)$$

(Spezialfall von § 2, Beispiel (d), umfaßt Beispiel (a) und Beispiel (c)), so ist (ϑ) und (ι) erfüllt, wenn $K(x)$ monoton fallend und $xK(x)$ monoton wachsend ist. So sind z. B., wenn $L_1(x) = |\ln x|$, $L_{n+1}(x) = \ln L_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) gesetzt wird, für $K(x)$ alle Funktionen

$$x^{\varepsilon - 1} \quad \text{und} \quad x^{-1}[L_1(x) \ldots L_n(x)]^{-1}[L_n(x)]^{-\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

zugelassen. Oder es sei $g(x, z) = K(x)\omega(z)$ (Beispiel (b) von § 2). Dann wird verlangt, daß $K(x)$ eine monoton fallende und $K(x)\omega(xz)$ eine monoton wachsende Funktion von x ist. Diesen beiden Bedingungen genügen beispielsweise die Funktionen

$$g(x, z) = \frac{z L_1(z) \ldots L_n(z)}{x L_1(x) \ldots L_n(x) L_n^{\varepsilon}(x)},$$

wie eine einfache Rechnung zeigt[5]).

Wenden wir uns nun dem Beweis von Satz 6 zu. Es ist leicht zu sehen, daß die Eindeutigkeitssätze von § 11 in zwei Richtungen verallgemeinert werden können.

(a) Von der Eigenschaft (3) der Kurve C wurde nirgends Gebrauch gemacht. Es genügt vorauszusetzen, daß C durch eine stetige, *im engeren Sinne* monoton fallende Funktion $y = \bar{y}(x)$ dargestellt wird (welche also eine eindeutig bestimmte und stetige Umkehrfunktion $\bar{x}(y)$ besitzt).

(b) Ist D_1 eine Teilmenge von D mit der Eigenschaft, daß mit $(x, y) \in D_1$ auch $\varrho(x, y) \subseteqq D_1$ gilt, so besteht Eindeutigkeit in D_1, wenn eine der Abschätzungen (5), (9), (10) in $D_1 - C$ gültig ist.

Es liege etwa ein charakteristisches Anfangswertproblem vor, und es seien u und $\bar{u}$ zwei Lösungen desselben. Mit T bezeichnen wir den Träger der Differenz $U = u - \bar{u}$, d. h. die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte (x, y)

[5]) Diese Definition gilt natürlich nur für kleine z. Ist $z_0 > 0$ so klein, daß der Zähler des Bruches für $0 \leqq z \leqq z_0$ monoton wachsend ist, so kann man für $z > z_0$ den Zähler etwa durch $z L_1(z_0) \cdots L_n(z_0)$ ersetzen.

mit $U(x, y) \neq 0$. Wir definieren zwei Funktionen

$$h_1(x) = \sup\{y_0 \mid (x, y) \notin T \quad \text{für} \quad 0 \leqq y \leqq y_0\}$$

und

$$h_2(x) = \inf\{h_1(s) \mid 0 \leqq s \leqq x\}$$

und haben dann zu zeigen, daß $h_2 \equiv b$ ist. Es ist $h_2 > 0$ für kleine x, da aus der Voraussetzung (mit $\xi = \eta = 0$) in Verbindung mit einem der Sätze von § 4 folgt, daß $U = 0$ in einer Umgebung des Nullpunktes ist. Ist also $h_2 \not\equiv b$, so tritt mindestens einer der folgenden drei Fälle ein:

(c_1) Es gibt ein Intervall $a_1 \leqq x \leqq a_2$, $(0 \leqq a_1 < a_2 \leqq a)$, in dem $h_2(x)$ stetig und im engeren Sinne monoton fallend ist;

(c_2) es gibt eine Sprungstelle ξ der Funktion $h_2(x)$, $0 < \xi < a$;

(c_3) es gibt ein Intervall $\xi < x < \xi_1$, in dem $h_2(x)$ konstant, etwa $h_2 = \eta$, $0 < \eta < b$, ist.

Wir suchen einen im Innern von R gelegenen Punkt $(\xi, \eta) \in T$ und eine stetige, im engeren Sinne monoton abnehmende Funktion $y_1(x)$, welche die beiden Eigenschaften

$$(28) \qquad y_1(\xi) = \eta \quad \text{und} \quad y_1(x) \leqq h_2(x) \qquad \text{für } |x - \xi| < \delta,\ \delta > 0$$

besitzt. Im Falle (c_1) kann man $y_1 = h_2$ und ξ beliebig mit $a_1 < \xi < a_2$ wählen. Liegt der Fall (c_2) vor, so wird $\eta = \lim\limits_{x \to \xi + 0} h_2(x)$ gesetzt. Man erkennt ähnlich wie oben (bei $\xi = \eta = 0$), daß die Annahme $\eta = 0$ im Widerspruch zu einem der Sätze von §4 steht. Gilt schließlich (c_3), so nehmen wir das in (c_3) angegebene (ξ, η). Auch die Annahme $\xi = 0$ führt zum Widerspruch. Einfache Überlegungen zeigen, daß in jedem der drei Fälle $(\xi, \eta) \in T$ ist und daß man eine den gestellten Bedingungen genügende Funktion $y_1(x)$ angeben kann (im Fall (c_1) ist das bereits geschehen).

Durch $y = y_1(x)$ ist in einer Umgebung des Punktes (ξ, η) eine Kurve C_1 mit den in (a) verlangten Eigenschaften definiert. Es sei $x_1(y)$ die Umkehrfunktion zu $y_1(x)$, und es möge eine der Abschätzungen (24) bis (27) für $|x - \xi| < \delta$, $|y - \eta| < \delta$ gelten. Wir werden in mehreren Schritten zeigen, daß $U(x, y) = 0$ ist für alle Punkte (x, y), die den Ungleichungen

$$(29) \qquad x_1(y) \leqq x \leqq \xi, \quad \eta \leqq y \leqq \eta + \delta_1 \qquad (\delta_1 = y_1(\xi - \delta))$$

genügen. Auf C_1 stimmen u und $\bar{u}$ einschließlich ihren Ableitungen erster Ordnung überein. Es sei die Punktmenge D_1 definiert durch die beiden Ungleichungen

$$(30) \qquad x_1(y) \leqq x \leqq \frac{x_1(y) + \xi}{2}, \quad \eta \leqq y \leqq \eta + \delta_1.$$

Verstehen wir unter r, X, Y jetzt die der Kurve C_1 entsprechenden Größen, so ist für $(x, y) \in D_1$

$$(31) \qquad r \leqq |x - \xi|\,|y - \eta|, \quad X \leqq |x - \xi|, \quad Y \leqq |y - \eta|.$$

Hieraus und aus der Monotonievoraussetzung (ι) ergibt sich, daß einer der Eindeutigkeitssätze von § 11 in der Verallgemeinerung (b) auf die Kurve C_1 und den Bereich D_1 anwendbar ist. Es ist demnach $U = 0$ in D_1. Derselbe Schluß läßt sich jetzt auf die Kurve

$$C_2: \quad x_2(y) = \frac{x_1(y) + \xi}{2} \text{ für } \eta \leqq y \leqq \eta + \delta_1$$

und die Punktmenge

$$D_2: \quad x_2(y) \leqq x \leqq \frac{x_2(y) + \xi}{2}, \qquad \eta \leqq y \leqq \eta + \delta_1$$

anwenden. Die Funktion $U(x, y)$ verschwindet also auch in D_2. Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich die Behauptung, daß $U(x, y)$ auf der durch (29) gekennzeichneten Punktmenge identisch Null ist. Dasselbe läßt sich in gleicher Weise für die Punkte (x, y) zeigen, welche den Ungleichungen

$$\xi \leqq x \leqq \xi + \delta, \qquad y_1(x) \leqq y \leqq \eta \tag{32}$$

genügen. Wir haben also das Ergebnis, daß $u = \bar{u}$ auf den Charakteristiken $x = \xi$ und $y = \eta$ ist, zumindest in einer Umgebung des Punktes (ξ, η). Nach einem der Sätze von § 4 ist dann aber $u = \bar{u}$ in einer vollen Umgebung des Punktes (ξ, η), in Widerspruch zur Annahme $(\xi, \eta) \in T$.

Der Satz ist damit für den Fall des charakteristischen Anfangswertproblems vollständig bewiesen. Beim nichtcharakteristischen Problem sind im Beweis kleine Änderungen anzubringen; ihre genaue Formulierung wird dem Leser überlassen.

Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics University of Maryland, College Park/Md. (USA) und
Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe

(Eingegangen am 9. Februar 1959)

Berichtigungen zu Teil I und II (Band 71)

S. 309, Zeile 11 v. u.: Statt „$0 < y \leqq b$" lies „$-\infty < y, \bar{y} < \infty$".

S. 446, Formel (25) muß lauten:

$$f_M(x, y, u, v, w) = f(x, y, u_M, v_M, w_M) \quad \text{mit} \quad t_M = \begin{cases} M & \text{für } t \geqq M \\ t & \text{für } |t| < M \\ -M & \text{für } t \leqq -M \end{cases} \tag{25}$$

S. 449, Zeile 2 v. o.: Statt „(39)" lies „(35) für $y = \eta$".

S. 449, Zeile 8 v. o.: In der Formelzeile ist y durch η zu ersetzen.

BAKER, I. N.
Math. Zeitschr. 73, 280–284 (1960)

The existence of fixpoints of entire functions

By
IRVINE NOEL BAKER

The existence and distribution of the fixpoints of entire functions are important in the study of the iteration of these functions; in [2] this is pointed out and reference is made to the literature. In the following if j is a positive integer $f_j(z)$ will denote the j-th iterate of the entire function $f(z)$. A fixpoint of exact order n of $f(z)$ is a solution of

$$f_j(z) - z = 0$$

for $j = n$ but not for any $j < n$. We prove the

THEOREM. *If $f(z)$ is an entire function other than a linear polynomial then there are fixpoints of exact order n of $f(z)$ except for at most one value of n.*

We must certainly exclude linear polynomials since, if

$$f(z) = \xi + a(z - \xi), \qquad a \neq 0 \text{ or a root of unity,}$$

then

$$f_n(z) = \xi + a^n(z - \xi)$$

and ξ is the only fixpoint (of order 1).

We use the following notation (c.f. [4]):

$n(f, r, a)$ = number of solutions of $f(z) = a$ in $|z| \leqq r$ counted according to multiplicity,

$\bar{n}(f, r, a)$ = number of *different* solutions of $f(z) = a$ in $|z| \leqq r$,

$$N(f, r, a) = \int_0^r \frac{n(f, t, a) - n(f, o, a)}{t}\, dt + n(f, o, a) \log r,$$

$$\bar{N}(f, r, a) = \int_0^r \frac{\bar{n}(f, t, a) - \bar{n}(f, o, a)}{t}\, dt + \bar{n}(f, o, a) \log r,$$

$T(f, r)$ = Nevanlinna characteristic of $f(z)$,

$M(f, r) = \operatorname{Max}_{|z| = r} |f(z)|$.

LEMMA 1 (PÓLYA [5]). *Let $e(z)$, $g(z)$ and $h(z)$ be entire functions satisfying*

(1) $$e(z) = g\{h(z)\}$$

(2) $$h(0) = 0.$$

There is a constant $c > 0$ independent of e, g, h — with

(3) $$M(e, r) > M\left[g, c\, M\left(h, \frac{r}{2}\right)\right].$$

Condition (2) can be dropped provided (3) is to hold merely for all sufficiently great r.

LEMMA 2. *For $n>k$, n and k positive integers, we have*

$$\lim_{r\to\infty} T(f_k, r)/T(f_n, r) = 0. \tag{4}$$

PROOF OF LEMMA 2. From [4, p. 24] and lemma 1:

$$\begin{aligned} T(f_n, r) &\geqq \frac{1}{3}\log M\left(f_n, \frac{r}{2}\right) \\ &> \frac{1}{3}\log M\left[f_k, cM\left(f_{n-k}, \frac{r}{4}\right)\right] \\ &> \frac{1}{3}\log M(f_k, r^{N+1}) \end{aligned}$$

for any arbitrarily large but fixed N provided r is large enough. By [1, p. 124 Hilfssatz 1] the last expression is greater than

$$\frac{N}{3}\log M(f_k, r) > \frac{N}{3}T(f_k, r)$$

for all sufficiently large r. This proves the lemma.

PROOF OF THE THEOREM. I: *The case of a transcendental $f(z)$.*

We suppose that there is no fixpoint of exact order k and select a fixed integer $n>k$. The function

$$\varphi(z) = \frac{f_n(z) - z}{f_{n-k}(z) - z} \tag{5}$$

is meromorphic. For $T(\varphi, r)$ we have (c.f. [4, p. 14])

$$\left\{\begin{aligned} T(\varphi, r) &\leqq T\left(f_n(z) - z, r\right) + T\left(f_{n-k}(z) - z, r\right) + O(1) \\ &\leqq T(f_n, r) + T(f_{n-k}, r) + O(\log r) \\ &= \{1 + o(1)\}\, T(f_n, r) \quad \text{by lemma 2.} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

By a similar argument it follows from

$$f_n(z) - z = \{f_{n-k}(z) - z\}\,\varphi(z)$$

that

$$T(f_n, r) \leqq T(f_{n-k}, r) + T(\varphi, r) + O(\log r)$$

so that

$$\{1 - o(1)\}\, T(f_n, r) \leqq T(\varphi, r)$$

which combined with (6) yields

$$T(\varphi, r) = \{1 + o(1)\}\, T(f_n, r). \tag{7}$$

In this calculation we have used the fact that the iterates of a transcendental function $f(z)$ are themselves transcendental so that their characteristics are not $O(\log r)$.

We now calculate the $\bar{N}$ functions of $\varphi(z)$ for the values 0, 1, ∞.

$$\bar{N}(\varphi, r, 0) \leqq \bar{N}\left(f_n(z) - z, r, 0\right) \tag{8}$$

$$\bar{N}(\varphi, r, \infty) \leqq \bar{N}\left(f_{n-k}(z) - z, r, 0\right) < T(f_{n-k}, r) + O(\log r). \tag{9}$$

If $\varphi(z)=1$ then $f_n(z)=f_{n-k}(z)$ so that $\xi=f_{n-k}(z)$ is a solution of $f_k(\xi)=\xi$ and by the hypotheses also a solution of $f_j(\xi)=\xi$ for some integer j, $1<j<k-1$. Thus $f_{n-k+j}(z)=f_{n-k}(z)$ and

$$(10)\qquad \begin{cases} \bar{N}(\varphi, r, 1) \leqq \sum_{j=1}^{k-1} \bar{N}\left(f_{n-k+j}(z) - f_{n-k}(z), r, 0\right) \\ \qquad\qquad \leqq \sum_{j=1}^{k-1} T\left(f_{n-k+j}(z) - f_{n-k}(z), r\right) \\ \qquad\qquad \leqq \sum_{j=1}^{k-1} T(f_{n-k+j}, r) + (k-1)\, T(f_{n-k}, r) + O(1). \end{cases}$$

Using (8), (9), (10) and the second fundamental theorem [4, p. 70] in the form

$$T(\varphi, r) \leqq \bar{N}(\varphi, r, o) + \bar{N}(\varphi, r, 1) + \bar{N}(\varphi, r, \infty) + S(r)$$

where $S(r)$ is $O\log(r\,T(\varphi, r))$ except on a set of intervals of finite total length, we have

$$T(\varphi, r) < \bar{N}\left(f_n(z) - z, r, o\right) + k\, T(f_{n-k}, r) + \sum_{j=1}^{k-1} T(f_{n-k+j}, r) + S(r).$$

Dividing by $T(f_n, r)$ and taking the lower limit as $r \to \infty$ we have in view of (7) and lemma 2:

$$(11)\qquad 1 \leqq \varliminf_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(f_n(z) - z, r, o)}{T(f_n, r)}.$$

Now if the number of different fixpoints of order $<n$ is measured by a counting function $N_1(r)$ we have

$$N_1(r) \leqq \sum_{j=1}^{n-1} \bar{N}\left(f_j(z) - z, r, o\right) \leqq \sum_{j=1}^{n-1} T(f_j, r) + O(\log r)$$

so that $\lim_{r\to\infty} \frac{N_1(r)}{T(f_n, r)} = 0$ by lemma 2. This together with (11) implies that there are fixpoints of exact order n. Thus the theorem is proved in the case when $f(z)$ is transcendental.

II. *The case when $f(z)$ is a polynomial*

Suppose $f(z)$ is a polynomial of degree $d \geqq 2$. Then $f_n(z)$ is a polynomial of degree d^n. We suppose that k and n are two positive integers with $n > k$ such that there are no fixpoints of order n or k. These numbers must satisfy

$$n > k \geqq 2$$

because the equation $f(z) - z = 0$ always has d solutions. As in (5) we form

$$\varphi(z) = \frac{f_n(z) - z}{f_{n-k}(z) - z}$$

and perform any necessary cancellation to put φ in the form $\frac{P(z)}{Q(z)}$ where $P(z)$ and $Q(z)$ are relatively prime polynomials of degrees $d^n - d^{n-k} + q$ and q respectively. $\varphi(z)$ has $d^n - d^{n-k}$ poles at $z = \infty$ and q poles at finite z values.

The number of poles (and hence of zeros) of $\varphi'(z)$ is therefore at most

$$d^n - d^{n-k} + 2q - 1. \tag{12}$$

We now count the number of different places where $\varphi(z)=0$. At any such place $f_n(z)-z=0$ and by hypothesis $f_j(z)-z=0$ for some $1\leqq j<n$. In fact j must divide n. Further if j divides k' and k' divides n every solution of $f_j(z)-z=0$ will be a solution of $f_{k'}(z)-z=0$ and will be counted among the solutions of this equation. Thus the *different* solutions of $\varphi(z)=0$ number at most

$$\sum{}' d^j \tag{13}$$

where the summation is taken over divisors j of n, $1<j<n$ excluding j for which there exists a k' with $j\,|\,k'$, $k'\,|\,n$, $j<k'<n$.

Similarly if $\varphi(z)=1$ we have $f_{n-k}(z)=f_n(z)=f_k\big(f_{n-k}(z)\big)$ and $f_{n-k}(z)$ being a fixpoint of $f_k(z)$, is by hypothesis a fixpoint of $f_j(z)$ for some divisor j of k with $1<j<k$. Thus $f_j\big(f_{n-k}(z)\big)=f_{n-k+j}(z)=f_{n-k}(z)$. The polynomial $f_{n-k+j}(z)-f_{n-k}(z)$ has degree d^{n-k+j} so that the number of different 1-points of $\varphi(z)$ is at most

$$\sum_{j\,|\,k} d^{n-k+j} \leqq \sum_{j=1}^{k-2} d^{n-k+j} \leqq d^{n-1} \quad \text{if} \quad k\geqq 3$$
$$\text{or} \quad = d^{n-1} \quad \text{if} \quad k=2.$$

Thus in any case the number is at most

$$d^{n-1}. \tag{14}$$

From (12), (13), (14) we conclude that the total number of solutions of the equations $\varphi(z)=0$ and $\varphi(z)=1$ (counting multiplicity) is at most

$$d^n - d^{n-k} + 2q - 1 + \sum{}' d^j + d^{n-1}$$

while from the form of $\varphi(z)$ it is exactly $2(d^n - d^{n-k}+q)$. This means that

$$2d^n - 2d^{n-k} + 2q \leqq d^n - d^{n-k} + 2q - 1 + \sum{}' d^j + d^{n-1}$$

or

$$d^n \leqq d^{n-k} + d^{n-1} - 1 + \sum{}' d^j$$
$$\leqq d^{n-2} + d^{n-1} - 1 + d^{n-2} \leqq d^n - 1$$

which is a contradiction. The last steps depend on the estimate that for $n=3$, 4 $\sum{}' d^j = d^{n-2}$ while for $n\geqq 5$ $\sum{}' d^j < d^1 + \cdots + d^{n-3} < d^{n-2}$.

Discussion of the result. A fixpoint ξ_1 of exact order n of $f(z)$ forms part of a *cycle* of order n. The members of the cycle are the values $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n$ which have the property

$$f(\xi_i) = \xi_{i+1}$$

or $f_j(\xi_i)=\xi_{i+j}$ where the $i+j$ is interpreted as a residue modulo n. No two of the n ξ_i are the same and all have the same value of $f_n'(\xi_i)$, namely

$$\prod_{j=1}^{n} f'(\xi_j)$$

which is called the multiplier of the cycle. Our result may be expressed in the form:

A non-linear entire function possesses cycles of all orders except for at most one exceptional order.

One exceptional value can indeed occur. The polynomial $f(z)=z^2-z$ has two fixpoints of order 1, namely 0 and 2. The fixpoints of $f_2(z)$ are 0 taken 3 times and 2 taken once. Thus there is no cycle of order 2. For transcendental functions there may be no fixpoints of order 1 as in the case of $f(z)=z+e^z$. One may ask if $n=1$ is the only possible exceptional order for transcendental functions.

For a certain class of functions including those with Picard exceptional values it has been shown in [3] that there are indeed fixpoints of exact order n for all n without exception.

If $f(z)$ is an entire transcendental function with no fixpoints of order k we can conclude from (11) not only that there are fixpoints of exact order n for $n>k$ but that their number provides an N-function of the same growth as $T(f_n, r)$. The question arises whether this remains true for *all* transcendental functions.

The results may also be expressed as necessary conditions that a given entire function be an iterate. As a sample of such statements we show: *If a transcendental entire function $F(z)$ is an iterate of nonprime order $n=pq$, ($p>1, q>1$ integers) then not all its fixpoints ξ (of first order) can have different multipliers $F'(\xi)$.*

PROOF. Suppose $F(z)=f_n(z)$. Then $f(z)$ is transcendental and since $p \neq n$ there will be cycles of order p or of order n for $f(z)$. If there is a cycle of order n there are n numbers $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ with $f_n(\xi_j)=\xi_j$ and $F'(\xi_j)=f_n'(\xi_j)$ is the same for $j=1, 2, \ldots, n$ as noted at the beginning of this section. If there is no cycle of order n then there is one of order p and there are numbers $\eta_1, \ldots, \eta_p$ such that $f(\eta_j)=\eta_j$ for $j=1, \ldots, p$ and $f_p'(\eta_j)$ is independent of j. But then $f_n(\eta_j)=\eta_j$ since p divides n and $F'(\eta_j)=\{f_p'(\eta_j)\}^{n/p}$ is the same for each η_j of the cycle. Thus the statement is proved. If we knew that cycles of every order other than the first do occur we could drop the non-prime condition above and would have a generalisation of [2, theorem 3] where a similar theorem is proved with restrictions on the growth of the functions involved.

References

[1] BAKER, I. N.: Zusammensetzungen ganzer Funktionen. Math. Z. **69**, 121–163 (1958). — [2] BAKER, I. N.: Fixpoints and iterates of entire functions. Math. Z. **71**, 146–153 (1959). — [3] BAKER, I. N.: Some entire functions with fixpoints of every order. To appear in the Journal of the Australian Mathematical Society. — [4] NEVANLINNA, R.: Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris: Gauthier-Villars 1929. — [5] PÓLYA, G.: On an integral function of an integral function. J. London Math. Soc. **1**, 12–15 (1926).

Dept. of Math., Imperial College of Science and Technology, London SW 7 (England)

(Eingegangen am 12. November 1959)

GROEMER, H.
Math. Zeitschr. 73, 285–294 (1960)

Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich

Von
HELMUT GROEMER

1. Liegt ein beschränkter konvexer Bereich B mit dem Flächeninhalt F vor, so gilt nach FEJES TÓTH [1] für die Anzahl n der Einheitskreise, die B ohne übereinanderzugreifen eingelagert werden können, falls $n \geqq 2$ ist,

$$n \cdot \sqrt{12} \leqq F. \tag{1}$$

Die Konstante $\sqrt{12}$ kann dabei durch keine größere ersetzt werden. Unter Benutzung eines Ergebnisses von SEGRE und MAHLER [2] soll hier eine Verschärfung von (1) bewiesen werden:

SATZ. *Sind in einem konvexen Bereich vom Flächeninhalt F und Umfang U n Einheitskreise eingelagert, so ist*

$$n \cdot \sqrt{12} \leqq F - \varkappa U + \lambda \tag{2}$$

mit

$$\varkappa = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 0{,}1339\ldots, \qquad \lambda = \sqrt{12} - \pi(\sqrt{3}-1) = 1{,}1642\ldots.$$

Das Gleichheitszeichen steht in (2) genau dann, wenn B die konvexe Hülle aller eingelagerten Kreise ist und, wenn die konvexe Hülle H aller Kreismittelpunkte eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

a) H kann in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 2 zerlegt werden und jeder Eckpunkt dieser Dreiecke ist Mittelpunkt eines Kreises.

b) H kann in geradlinige Strecken der Länge 2 zerlegt werden, und jeder Endpunkt dieser Strecken ist Mittelpunkt eines Kreises.

c) H ist ein Punkt.

Die Ungleichung (2) ist auch für $n=1$ richtig und für $n>1$, mit Rücksicht auf

$$U \geqq 2\pi + 4 > \frac{\lambda}{\varkappa} = 8{,}7\ldots,$$

atsächlich schärfer als (1).

Es sei noch bemerkt, daß eine zu (2) analoge Ungleichung unmittelbar aus einer von FEJES TÓTH a.a.O. S. 71 bewiesenen Beziehung folgt, nämlich

$$n \cdot \sqrt{12} \leqq F - (2-\sqrt{3})\, p + \sqrt{12} - \pi.$$

p bedeutet dabei die Anzahl der an der Peripherie liegenden Kreise. (Ein Kreis heiße an der Peripherie liegend, wenn ein Randpunkt von B existiert, dessen Abstand vom Mittelpunkt dieses Kreises kleiner ist als seine Distanz von allen anderen Kreismittelpunkten.)

2. Für den Beweis des Satzes darf man annehmen, daß B die konvexe Hülle C aller eingelagerten Kreise ist. Dies läßt sich folgendermaßen einsehen: Bedeuten $\overline{F}$ und $\overline{U}$ den Flächeninhalt bzw. den Umfang von C, so sei $\Delta F = F - \overline{F}$ und $\Delta U = U - \overline{U}$ gesetzt. Es genügt

$$\Delta F - \varkappa \Delta U \geqq 0$$

zu zeigen. Der Bereich $B - C$ werde hierzu durch Gerade, die von den Endpunkten der Strecken, welche C begrenzen, ausgehen und auf diese senkrecht stehen, in Teilbereiche D_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ zerlegt. D_i liefere zu ΔF den Beitrag ΔF_i und zu ΔU den Beitrag ΔU_i. Offenbar reicht es hin,

$$\Delta F_i - \varkappa \Delta U_i \geqq 0$$

zu beweisen. Es müssen zwei Fälle unterschieden werden.

a) D_i wird von einer Geraden g, zwei auf g senkrecht stehenden Geraden und einem g gegenüberliegenden konvexen Bogen begrenzt. Betrachtet man ein in D_i liegendes Dreieck mit der Basis g und größt möglicher Höhe, so sieht man, daß wegen $g \geqq 2$

$$\Delta F_i \geqq \frac{h \cdot g}{2} \geqq h$$

ist. Für ΔU_i findet man, da der D_i begrenzende konvexe Bogen in einem Koordinatensystem, das Achsen parallel zu g und h hat, in zwei monotone Bögen zerfällt und da $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leqq |\Delta x| + |\Delta y|$ ist

$$\Delta U_i \leqq 2h.$$

Somit erhält man die gewünschte Ungleichung

$$\Delta F_i - \varkappa \Delta U_i \geqq h - 2\varkappa h \geqq 0{,}73\, h \geqq 0.$$

b) D_i wird von einem Einheitskreisbogen der Länge α_i, zwei auf diesem senkrecht stehenden Geraden und einem konvexen Bogen b_i der Länge L_i begrenzt. Der Flächeninhalt F_i von D_i wird durch

$$F_i = \tfrac{1}{2} \int_0^{L_i} H(s)\, ds$$

gegeben, wobei ds das Differential der Bogenlänge von b_i, und $H(s)$ die durch b_i definierte Stützfunktion in bezug auf den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises ist. Wegen $H(s) \geqq 1$ gilt demnach $F_i \geqq \frac{L_i}{2}$ und daher

$$\Delta F_i \geqq \frac{L_i}{2} - \frac{\alpha_i}{2}.$$

Somit ergibt sich

$$\Delta F_i - \varkappa \Delta U_i \geqq \frac{L_i}{2} - \frac{\alpha_i}{2} - \varkappa (L_i - \alpha_i) = (L_i - \alpha_i)\left(\frac{1}{2} - \varkappa\right) \geqq 0,$$

letzteres, weil $\varkappa < \frac{1}{2}$ ist und weil in einem geeigneten Polarkoordinatensystem (ϱ, φ), das den Ursprung im entsprechenden Kreismittelpunkt hat wegen $\varrho \geqq 1$

$$L_i = \int_0^{\alpha_i} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \geqq \int_0^{\alpha_i} d\varphi = \alpha_i$$

gilt.

Damit ist bewiesen, daß stets

$$\bar{F} - \varkappa \bar{U} \leqq F - \varkappa U$$

gilt, dabei steht das Gleichheitszeichen, wie man unmittelbar aus dem Beweis ersieht nur für $B = C$.

Für alles weitere wird $B = C$ angenommen. Der Rand B^* von B besteht dann aus einer endlichen Anzahl von Geraden und Kreisbögen vom Radius 1. Für die Summe S der Längen aller dieser Kreisbögen gilt, wie man leicht bestätigt,

$$S = 2\pi. \tag{3}$$

Zu einem Kreis K werde nun die Menge Z aller Punkte betrachtet, die vom Mittelpunkt von K einen Abstand haben, der nicht größer ist als die Abstände zu den Mittelpunkten der anderen Kreise. Z heiße die zu K gehörige Zelle. Man sieht unschwer, daß Z konvex ist, K enthält und daß die Vereinigung aller Zellen B lückenlos überdeckt, wobei zwei verschiedene Zellen höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Der Rand von Z besteht aus einer endlichen Anzahl von geraden Strecken, die die Zellenwände genannt werden sollen, und einem Kreisbogen. Dabei sei hier wie bei allen Feststellungen ähnlicher Art die Möglichkeit eingeschlossen, daß entweder der geradlinige oder der gekrümmte Teil des Randes des betreffenden Bereiches verschwindet. Jede Zellenwand ist in der Mittelsenkrechten der Verbindungslinie vom Mittelpunkte P des in der Zelle eingelagerten Kreises zu dem Mittelpunkt eines gewissen anderen Kreises enthalten. Verbindet man P mit den Endpunkten der Zellenwände und fällt man von P aus auf die Zellenwände das Lot, falls es in Z enthalten ist, so zerfällt Z in eine endliche Anzahl von Dreiecken und einen Kreissektor. Ein Polygon, das von zwei von P ausgehenden Geraden der eben beschriebenen Art und einem Teil des Randes von Z begrenzt wird soll ein Zellenpolygon oder, falls es m Ecken hat, ein Zellen m-Eck genannt werden. Der Punkt P, der die Spitze des Zellenpolygons heißen soll, ist dabei stets als Ecke mitzuzählen. Unter dem Winkel eines Zellenpolygons ist der entsprechende Innenwinkel an der Spitze zu verstehen. Als Basis eines Zellendreiecks werde die seinem Winkel gegenüberliegende Seite bezeichnet und die von P ausgehende Höhe soll die Höhe des Zellendreiecks heißen. Enthält

ein Zellendreieck nicht seine Höhe, so werde es ausgeartet genannt und ist die Höhe eine Seite des Zellendreiecks, der Winkel zwischen einer Dreiecksseite und der Basis also ein rechter, so werde von einem normalen Zellendreieck gesprochen. Schließlich definiere ich noch den Randbeitrag eines Zellenpolygons Z_0 als die Summe der Längen aller Seiten von Z_0, die in B^* liegen; gibt es keine solche Seite, so sei der Randbeitrag von Z_0 0 gesetzt. Man beachte hierbei, daß eine Seite von Z_0 entweder ganz in B^* liegt oder höchstens endlich viele Punkte mit B^* gemeinsam hat.

3. Es sollen nun einige Hilfssätze bewiesen werden. Für die Bezeichnung einer Strecke und der Länge dieser Strecke werden im allgemeinen dieselben Buchstaben verwendet und entsprechendes gilt auch für die Bezeichnung von Winkeln und Flächen.

HILFSSATZ 1. *Kann jede Zelle in einen Kreissektor und in eine Anzahl von Zellenpolygone Z_i so zerlegt werden, daß für den Randbeitrag r_i und den Winkel α_i von Z_i gilt*

$$\alpha_i \frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} r_i \leqq Z_i, \tag{4}$$

so ist (2) *richtig. Gilt in jeder der Ungleichungen* (4) *Gleichheit, so auch in* (2); *gilt in mindestens einer der Ungleichungen* (4) *nicht das Gleichheitszeichen, so gilt es auch in* (2) *nicht.*

BEWEIS. Wegen (3) ist $\sum r_i = U - 2\pi$, $\sum Z_i = F - \pi$ und $\sum \alpha_i = 2\pi n - 2\pi$, wobei die Summation über die im Hilfssatz genannten Zellenpolygone aller vorhandenen Zellen zu erstrecken ist. Führt man in (4) die entsprechende Summation aus, so erhält man damit

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(2\pi n - 2\pi) + \frac{2-\sqrt{3}}{2}(U - 2\pi) \leqq F - \pi.$$

Dies aber ist mit (2) gleichbedeutend und die Richtigkeit der Behauptung über das Gleichheitszeichen ist daraus ebenfalls ersichtlich.

HILFSSATZ 2. *Hat ein Zellenpolygon den Randbeitrag* 0, *so gilt für dessen Winkel und Fläche* (4).

Für den Beweis siehe SEGRE und MAHLER [2].

HILFSSATZ 3. *Gilt für die Höhe h eines Zellendreiecks Z_0*

$$h \geqq 1{,}2,$$

so ist für dessen Randbeitrag r und dessen Winkel α (4) *erfüllt.*

BEWEIS. Wegen Hilfssatz 2 kann man $r > 0$ annehmen. r ist dann die Basis von Z_0. Bezeichnet β den Winkel zwischen h und der Winkelhalbierenden von α, so ergibt sich

$$r = h\left(\operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\right). \tag{5}$$

Da $\beta+\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ sein muß, ist $\frac{\partial r}{\partial \beta}\geqq 0$ und daher die rechte Seite von (5) am kleinsten, wenn $\beta=0$ ist; daraus folgt, daß stets

$$r\geqq 2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \tag{6}$$

gilt. Aus der Tatsache daß $\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ monoton fällt, was ebenfalls leicht durch Differenzieren einzusehen ist, und aus (6) folgt für $h\geqq 1{,}2$

$$\frac{1}{r}\left(Z_0-\alpha\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)=\frac{h}{2}-\frac{\alpha}{r}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\geqq\frac{h}{2}-\frac{\alpha}{2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\geqq\frac{h}{2}-\frac{1}{h}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\geqq 0{,}14\ldots$$

und somit

$$\frac{1}{r}\left(Z_0-\alpha\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)>\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

was mit (4) äquivalent ist.

Hilfssatz 4. *Hat ein ausgeartetes Zellendreieck positiven Randbeitrag, so erfüllt es die Ungleichung* (4).

Beweis. Das Zellendreieck werde mit Z_1 bezeichnet. Es habe die Höhe h_1 und die Basis also auch den Randbeitrag b_1. Wegen Hilfssatz 3 genügt es zu zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen $h_1\geqq 1{,}2$ ist. Da Z_1 ausgeartet ist, wird h_1 etwa im Abstand x von der Spitze des Dreiecks von der Basis b_2 eines benachbarten Zellendreiecks Z_2 geschnitten. Die Höhe von Z_2 sei h_2. Ist Q derjenige Endpunkt von h_2, der nicht die Spitze von Z_2 ist, so hat Q von der Geraden die b_1 enthält einen Abstand d mit $d\geqq 1$; denn Q ist der Mittelpunkt einer Strecke, deren beide Endpunkte Mittelpunkte von eingelagerten Kreisen sind. Berechnet man x aus h_1, h_2 und d, so ergibt sich damit, wenn $h_1<1{,}2$ wäre, unter Beachtung von $h_2\geqq 1$

$$h_1>x=\frac{h_2^2}{(h_1-d)}\geqq 5.$$

Hilfssatz 5. *Ein Zellenviereck Z_0 bestehe aus zwei normalen Zellendreiecken Z_1 und Z_2, so daß deren gemeinsame Seite die Hypotenuse von Z_1 und Z_2 ist. Für Z_0 gilt* (4).

Beweis. Für $i=1{,}2$ bezeichne h_i die Höhe und b_i die Basis von Z_i. Der Winkel von Z_0 sei α. Wegen der Hilfssätze 2 und 3 kann angenommen werden, daß eine der beiden Basen, etwa b_1, der Randbeitrag von Z_0 ist und $h_1<1{,}2$ gilt. Der zur Spitze von Z_0 bezüglich b_2 symmetrische Punkt ist der Mittelpunkt eines eingelagerten Kreises und hat daher von der Geraden, die b_1 enthält, einen Abstand, der nicht kleiner als 1 ist. Daraus folgt

$$\cos\alpha\leqq\frac{h_1-1}{2h_2}. \tag{7}$$

Berechnet man b_1 und b_2 aus α, h_1 und h_2, so ergibt sich

$$b_1=\frac{h_2-h_1\cos\alpha}{\sin\alpha},\qquad b_2=\frac{h_1-h_2\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Damit erhält man

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{b_1}\left(Z_0-\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}\right)=\dfrac{h_1b_1+h_2b_2}{2b_1}\dfrac{\alpha}{b_1}\dfrac{\sqrt{3}}{\pi} \\ \qquad\qquad =\dfrac{h_1}{2}+\dfrac{h_2}{2}\dfrac{h_1-h_2\cos\alpha}{h_2-h_1\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{h-h_1\cos\alpha}\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}. \end{cases}$$

Es sei zunächst $\alpha<\frac{\pi}{2}$, also $\cos\alpha>0$ vorausgesetzt. (7) und (8) ergeben dann

$$(9)\qquad \frac{1}{b_1}\left(Z_0-\alpha\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\geqq\frac{1+3h_1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2-h_1(h_1-1)}.$$

Bezeichnet man den letzten Ausdruck mit $F(h_1)$, so ist für $1\leqq h_1<1{,}2$ $2-h_1(h_1-1)>0$ und somit

$$\frac{d^2F(h_1)}{dh^2}=\frac{-\sqrt{3}}{(2-h_1(h_1-1))^2}\left(1+\frac{(2h_1-1)^2}{2-h_1(h_1-1)}\right)<0.$$

$F(h_1)$ nimmt daher das Minimum am Rande an und wegen

$$F(1{,}2)>\frac{2-\sqrt{3}}{2},\qquad F(1)=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

ist daher

$$\frac{1}{b_1}\left(Z_0-\alpha\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)>\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

woraus unmittelbar (4) folgt.

Nun werde $\alpha\geqq\frac{\pi}{2}$, also $\cos\alpha\leqq0$, angenommen. Es gilt einerseits, da $h_1\geqq1$ und daher $h_1-\cos\alpha\geqq1-h_1\cos\alpha$ ist.

$$(10)\qquad \frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\frac{h_1-h_2\cos\alpha}{h_2-h_1\cos\alpha}\geqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{h_1-\cos\alpha}{1-h_1\cos\alpha}\geqq1$$

und andererseits wegen der Monotonie von $\dfrac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

$$(11)\qquad \frac{\alpha\sin\alpha}{h_2-h_1\cos\alpha}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\leqq\frac{\alpha\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\leqq\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\leqq\frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(8), (10) und (11) ergeben abermals (4).

Es möge beachtet werden, daß das Gleichheitszeichen durchgehend genau dann gilt, wenn $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $h_1=1$ und $h_2=1$ ist. Weiters sei noch bemerkt, daß die Formeln (9) und (10) zeigen, daß stets $\frac{Z_0}{b_1}\geqq1$ ist.

HILFSSATZ 6. *Z_1 sei ein Zellendreieck, dessen Basis nicht in B^* liegt. Gilt für die Höhe h_1 von Z_1 $h_1\leqq\sqrt{2}$, so ist Z_1 nicht ausgeartet.*

BEWEIS. Angenommen Z_1 sei ausgeartet. h_1 wird dann von der Basis eines benachbarten Zellendreiecks Z_2 etwa im Abstand x von der Spitze von Z_1 geschnitten. Z_2 habe die Höhe h_2. Die dritte Seite des Dreiecks mit den Seiten h_1 und h_2 sei g. Es muß $g\geqq1$ sein; denn verlängert man h_1 und h_2

über g hinaus auf das Doppelte, so erhält man ein Dreieck mit den Seiten $2h_1$, $2h_2$, $2g$ und dessen Ecken Mittelpunkte von Einheitskreisen sind. Bezeichnet α den Winkel zwischen h_1 und h_2, so gilt

$$\cos\alpha = \frac{h_2^2 + h_1^2 - g^2}{2h_2 h_1}, \tag{12}$$

und wegen $h_2 \geqq 1$, $g \geqq 1$, $h_1 \leqq \sqrt{2}$ ist $h_2^2 \geqq h_1^2 - g^2$, woraus mit (12) $\cos\alpha \leqq \frac{h_2}{h_1}$ folgt. Dies gibt, da $\cos\alpha = \frac{h_2}{x}$ sein muß, $x \geqq h_1$. Aus der Annahme, daß Z_1 ausgeartet ist, entnimmt man aber auf Grund der Definition von x, daß $x < h_1$ ist.

HILFSSATZ 7. *Ein normales Zellendreieck Z_1 habe eine Basis, die in B^* liegt. Hat ein Zellendreieck Z_2, dessen eine Seite die Hypotenuse von Z_1 ist, eine Höhe h_2 mit $h_2 \geqq 1{,}56$, so gilt für Z_1 (4).*

BEWEIS. Es seien für $i = 1, 2$ α_i der Winkel, h_i die Höhe und b_i die Basis von Z_i. Wie immer kann $h_1 < 1{,}2$ angenommen werden. Zunächst ist leicht einzusehen, daß

$$b_1 < 1{,}48 \tag{13}$$

vorausgesetzt werden darf. Ist nämlich $b_1 \geqq 1{,}48$, so hat man, da $\frac{\operatorname{arctg} b_1}{b_1}$ eine monoton fallende Funktion ist,

$$\frac{1}{b_1}\left(Z_1 - \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) = \frac{h_1}{2} - \frac{\operatorname{arctg}\frac{b_1}{h_1}}{b_1}\frac{\sqrt{3}}{\pi} \geqq \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{arctg} b_1}{b_1}\frac{\sqrt{3}}{\pi}$$
$$\geqq \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{arctg} 1{,}48}{1{,}48}\frac{\sqrt{3}}{\pi} \geqq \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

also gilt (4) in diesem Falle. Der Hilfssatz ist somit bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß aus (13) $h_2 < 1{,}56$ folgt. Bedeutet α den Winkel zwischen h_1 und h_2, so findet man, daß

$$h_2 = h_1\cos\alpha + b_1\sin\alpha \tag{14}$$

ist. Gilt $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$, so erhält man daraus

$$h_2 \leqq b_1\sin\alpha \leqq b_1 < 1{,}48 < 1{,}56.$$

Ist aber $\alpha < \frac{\pi}{2}$, so folgt aus (7) $h_2 \leqq \frac{h_1 - 1}{2\cos\alpha}$ und dies ergibt mit (14)

$$h_1\cos\alpha + b_1\sin\alpha \leqq \frac{h_1 - 1}{2\cos\alpha}.$$

Daraus findet man

$$\operatorname{tg}\alpha \geqq \frac{b_1}{h_1 - 1} + \sqrt{\frac{b_1}{(h_1-1)^2} + \frac{h_1 + 1}{h_1 - 1}}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wächst mit b_1 und fällt mit h_1; sie wird daher nicht vergrößert, wenn man $b_1 = 1{,}48$ und $h_1 = 1{,}2$ setzt. Dies ergibt

$\operatorname{tg}\alpha > 15{,}5$, woraus $\cos\alpha < 0{,}065$ und damit

$$h_2 = h_1\cos\alpha + b_1\sin\alpha < 1{,}2\cdot 0{,}065 + 1{,}48 < 1{,}456$$

folgt.

HILFSSATZ 8. *Es sei ein Zellenfünfeck Z_0 gegeben, das aus drei Zellendreiecken Z_1, Z_2, Z_3, besteht, die folgende Eigenschaften haben: Z_1 sei normal und habe eine Basis die in B^* liegt. Die Hypotenuse von Z_1 sei eine Seite von Z_2. Z_2 soll ausgeartet sein und eine Höhe h_2 haben, für die $h_2 < 1{,}56$ gilt. Z_3 habe eine Seite mit Z_2 gemeinsam, eine Basis die nicht in B^* liegt und, falls es zwei Zellendreiecke mit diesen Eigenschaften gibt, so sei Z_3 dasjenige mit den kleineren Winkel. Unter diesen Voraussetzungen ist Z_3 normal und für Z_0 gilt* (4).

BEWEIS. Wie üblich sollen h_i und b_i die Höhe bzw. die Basis von Z_i $(i=1, 2, 3)$ bezeichnen. α_0 sei der Winkel von Z_0. Es kann wieder $h_1 < 1{,}2$ vorausgesetzt werden, denn ist $h_1 \geqq 1{,}2$, so gilt (4) für Z_1 nach Hilfssatz 3. Da Z_2 und Z_3 den Randbeitrag 0 haben, ist (4) auch für diese beiden Dreiecke richtig, wie aus Hilfssatz 2 zu entnehmen ist. Durch Addition der drei entsprechenden Ungleichungen für Z_1, Z_2 und Z_3 erhält man dann (4) für Z_0.

Vorerst läßt sich zeigen, daß Z_3 nicht ausgeartet ist, woraus dann unmittelbar folgt, da es minimalen Winkel hat, daß Z_3 normal ist. Nach Hilfssatz 6 ist es hinreichend $h_3 \leqq \sqrt{2}$ zu beweisen. Der Winkel zwischen h_2 und h_3 werde mit β bezeichnet und g sei die dritte Seite in dem Dreieck mit den Seiten h_2 und h_3. Wie beim Beweis von Hilfssatz 6 sieht man, daß $g \geqq 1$ gilt und da Z_2 ausgeartet ist, muß

$$h_3 \leqq h_2\cos\beta \tag{15}$$

sein. Damit folgt

$$g^2 = h_2^2 + h_3^2 - 2h_2h_3\cos\beta \leqq h_2^2 - h_3^2$$

und daher

$$\frac{\partial\cos\beta}{\partial h_3} = \frac{\partial}{\partial h_3}\,\frac{h_2^2 + h_3^2 - g}{2h_2h_3} = \frac{1}{h_2h_3^2}\,(g^2 - h_2^2 - h_3^2) \leqq 0.$$

$\cos\beta$ als Funktion von h_3 ist also monoton fallend und somit gilt wegen $g \geqq 1$

$$\cos\beta = \frac{h_2^2 + h_3^2 - g^2}{2h_2h_3} \leqq \frac{h_2^2 + 1 - g^2}{2h_2} \leqq \frac{h_2}{2}. \tag{16}$$

Zusammen mit (15) gibt dies

$$h_3 \leqq \frac{h_2^2}{2} \leqq \frac{1{,}56^2}{2} < \sqrt{2}.$$

Z_3 ist demnach normal. Aus (16) und $h_2 < 1{,}56$ erhält man noch

$$\beta > 0{,}66 > \frac{\pi}{6}. \tag{17}$$

Es seien nun T_1 das von h_1, h_2, b_1 und von der Geraden die b_2 enthält begrenzte Viereck. Der Teil von T_1 der nicht in Z_0 liegt ist ein Dreieck, das mit T_2 bezeichnet werde. Schließlich sei T_3 dasjenige Dreieck, dessen Seiten in h_2, h_3 und b_3 liegen. Offenbar ist

$$Z_0 = T_1 - T_2 + T_3$$

und daher ist (4) für Z_0 bewiesen, sobald

$$\beta \frac{\sqrt{3}}{\pi} \leqq T_3 \tag{18}$$

und

$$(\alpha_0 - \beta) \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{2-\sqrt{3}}{2} b_1 \leqq T_1 - T_2 \tag{19}$$

gezeigt ist, denn die Addition von (18) und (19) gibt (4). Zum Beweis von (18) beachte man, daß wegen der Monotonie von $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$ und auf Grund von (17)

$$T_3 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\beta = \frac{1}{2} h_3 \operatorname{tg}\beta - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\beta \geqq \beta\left(\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) > 0$$

gilt. Um (19) zu beweisen, werde die Fläche von T_2 abgeschätzt. Man findet wegen $h_2 < 1{,}56$ und (17)

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(h_2 - \frac{h_3}{\cos\beta}\right)^2 \operatorname{ctg}\beta \leqq \frac{1}{2}\left(1{,}56 - \frac{1}{\cos 0{,}66}\right)^2 \operatorname{ctg} 0{,}66 < 0{,}06. \tag{20}$$

Weiters kann

$$b_1 > 1{,}25 \tag{21}$$

vorausgesetzt werden denn (7) auf den hier vorliegenden Fall angewendet ergibt $\cos(\alpha_0 - \beta) \leqq 0{,}1$ und damit, falls $b_1 \leqq 1{,}25$ ist,

$$h_2 = h_1 \cos(\alpha_0 - \beta) + b_1 \sin(\alpha_0 - \beta) \leqq 1{,}2 \cdot 0{,}1 + 1{,}25 \leqq \sqrt{2}.$$

Aus Hilfssatz 6 folgt dann, daß Z_2 nicht ausgeartet sein kann. Wendet man die am Ende des Beweises von Hilfssatz 5 gemachte Bemerkung auf T_1 und b_1 an, so erhält man $\frac{T_1}{b_1} \geqq 1$. Zusammen mit (20) und (21) ergibt sich daraus

$$\frac{T_1 - T_2}{b_1} \geqq 1 - \frac{0{,}06}{1{,}25} > 0{,}95. \tag{22}$$

Nach Voraussetzung und Hilfssatz 6 ist $h_1 < 1{,}2 < \sqrt{2} \leqq h_2$ und daher

$$\frac{1}{2}(\alpha_0 - \beta) < \operatorname{arctg}\frac{b_1}{h_1}.$$

Die letzte Ungleichung, (21), (22) und die Monotonie von $\frac{\operatorname{arctg} b_1}{b_1}$ ergeben

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_1}\left(T_1 - T_2 - (\alpha_0 - \beta)\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) &> 0{,}95 - 2\frac{\operatorname{arctg}\frac{b_1}{h_1}}{b_1}\frac{\sqrt{3}}{\pi} \\ &\geqq 0{,}95 - 2\frac{\operatorname{arctg} b_1}{b_1}\frac{\sqrt{3}}{\pi} > 0{,}95 - 2\frac{\operatorname{arctg} 1{,}25}{1{,}25}\frac{\sqrt{3}}{\pi} > \frac{2-\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Daraus aber ersieht man unmittelbar (19) und der Hilfssatz ist bewiesen.

4. Der eingangs formulierte Satz kann nun leicht bewiesen werden. Um die Richtigkeit der Ungleichung (2) zu zeigen, ist nur zu überprüfen, ob die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt sind. Hat eine Zelle den Randbeitrag 0, so gilt für sie (4) wegen Hilfssatz (2). Es möge demnach positiver

Randbeitrag vorausgesetzt werden. Z_1 sei ein Zellendreieck, dessen Basis in B^* liegt. Nach Hilfssatz 3 kann für die Höhe h von Z_1 $h<1{,}2$ angenommen werden, und Hilfssatz 4 berechtigt zu der Annahme, daß Z_1 nicht ausgeartet ist. Z_1 ist dann entweder normal oder kann in zwei normale Zellendreiecke zerlegt werden. Man kann jedes der beiden Dreiecke separat behandeln und somit Z_1 als normal voraussetzen. Ist ein Zellendreieck Z_2, dessen eine Seite die Hypotenuse von Z_1 ist, normal, so ergibt Hilfssatz 5 die Richtigkeit von (4) für das Zellenviereck, das aus Z_1 und Z_2 besteht. Es sei somit vorausgesetzt, daß das Z_1 benachbarte Zellendreieck Z_2 ausgeartet ist und zudem, wegen Hilfssatz 7, daß die Höhe von Z_2 nicht größer als 1,56 ist. Dann besagt aber Hilfssatz 8, daß (4) für das Zellenfünfeck, das aus Z_1, Z_2 und dem sich an Z_2 anschließenden normalen Zellendreieck besteht, richtig ist. Um die im Hilfssatz 1 verlangte Einteilung einer Zelle in Zellenpolygone zu gewinnen, hat man demnach die normalen Zellendreiecke mit positivem Randbeitrag und eventuell noch je ein oder zwei diesem benachbarte Zellendreiecke zu verwenden. Es ist leicht einzusehen, daß ein Zellendreieck nie in mehreren solchen Vereinigungen vorkommen kann. Alle restlichen Dreiecke der Zelle, falls es welche gibt, haben den Randbeitrag 0 und Hilfssatz 2 gibt (4) für diese Zellendreiecke.

Die Hilfssätze 3, 4, 5, 7 und 8 ergaben für die Relation (4) strikte Ungleichheit, es sei denn, wie am Ende des Beweises von Hilfssatz 5 bemerkt wurde, daß ein Zellenviereck vorliegt, das ein Quadrat der Seitenlänge 1 mit einer in B^* liegenden Seite ist. Den im Satze genannten Bereich H erhält man dann von B ausgehend, wenn man alle diese Quadrate und die im Hilfssatz 2 erwähnten Kreissektoren von B abzieht. Ist H ein- oder nulldimensional, so liegen also die Fälle b) oder c) des Satzes vor und umgekehrt gilt in diesen Fällen auch Gleichheit. Ist H zweidimensional, so besteht H aus einer Anzahl von Zellenpolygonen, für die (4) gilt. Aus dem von SEGRE und MAHLER gegebenen Beweis des Hilfssatzes 2 folgt, daß für alle diese Zellenpolygone dann und nur dann Gleichheit in (4) besteht, wenn der Durchschnitt einer jeden Zelle mit H entweder ein reguläres, einem eingelagerten Kreis umschriebenes Sechseck ist oder, falls der Mittelpunkt des Kreises auf dem Rande von H liegt, ein Teil eines solchen Sechsecks ist, der durch zwei Mittelsenkrechten auf die Seiten von dem regulären Sechseck ausgeschnitten wird. Verbindet man die Mittelpunkte von je zwei einander berührenden Kreisen, so erhält man die verlangte Zerlegung von H in gleichseitige Dreiecke. Andererseits gilt in diesem Falle auch wirklich Gleichheit in (4) und damit in (2). Dies ergibt Teil a) des Satzes.

Literatur

[1] FEJES TÓTH, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 65, S. 67. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. — [2] SEGRE, B., and K. MAHLER: On the densest packing of circles. Amer. Math. Monthly **51**, 261–270 (1944).

Department of Mathematics, Oregon State Coll. Corvallis, Oregon, U.S.A.

(Eingegangen am 12. Juni 1959)